Fondamenti teorici e predizioni verificabili della Relatività Ristretta Planckiana

Alessio De Angelis

Ottobre 2025

Prima edizione: ottobre 2025.

Stampato in Italia.

Abstract

La Relatività Ristretta Planckiana (RRP)[1] si propone come estensione simmetrica della Relatività Ristretta di Einstein, fondata sull'invarianza della velocità della luce c. In questo nuovo quadro, l'energia di Planck

$$E_p = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}}$$

viene assunta come costante universale invariante e come limite superiore invalicabile per l'energia concentrata in un singolo evento fisico elementare o in un processo localizzato, e non per l'energia totale macroscopica di un sistema esteso.

Viene introdotto un nuovo fattore di trasformazione,

$$\gamma_E(E) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{E}{E_p}\right)^2}},$$

speculare al fattore di Lorentz $\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$, che governa la dipendenza del tempo proprio dal contenuto energetico. Per $E \to 0$ si recupera il limite classico $\mathrm{d}\tau \approx \mathrm{d}t$, mentre per $E \to E_p$ si verifica un'accelerazione del tempo proprio, con $\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t \to \infty$.

La teoria conserva la struttura di gruppo di Lorentz mediante l'introduzione dei boost energetici, caratterizzati dal parametro $\beta_E = E/E_p$, e definisce un invariante planckiano

$$s_E^2 = (c_E t)^2 - |\vec{x}|^2,$$

che resta costante sotto le trasformazioni planckiane.

Le equazioni di campo di Einstein vengono modificate sostituendo al tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$ una forma efficace

$$T_{\mu\nu}^{(\mathrm{eff})} = \frac{T_{\mu\nu}}{\gamma_E^2},$$

[1] Questa versione del lavoro rappresenta la **prima stesura integrale** della ricerca, non ancora **sottoposta a revisione esterna**. Il testo potrebbe contenere **imprecisioni formali** o **errori di conversione in LaTeX**, e sarà oggetto di **revisione, integrazione e ampliamento** nelle versioni successive, prima della sottomissione a peer review.

con conseguente attenuazione delle singolarità gravitazionali.

Tra le predizioni principali della RRP vi sono: scenari cosmologici senza singolarità iniziale (Big Bounce), buchi neri regolari privi di singolarità centrale, deviazioni cinematiche nei raggi cosmici ultra-energetici e modifiche spettrali nelle onde gravitazionali emesse da collassi estremi.

La Relatività Ristretta Planckiana si configura dunque come una teoria falsificabile e testabile, capace di fornire un ponte concettuale e matematico tra la Relatività di Einstein e le scale quantistiche di Planck.

Indice

1 Introduzione

1.1 Limiti della Relatività Ristretta e Generale di Einstein

Le teorie relativistiche formulate da Albert Einstein nel XX secolo — la Relatività Ristretta (1905) e la Relatività Generale (1915) — hanno rivoluzionato la fisica moderna, fornendo un quadro coerente per la descrizione dello spazio-tempo, della dinamica dei sistemi ad alta velocità e della gravitazione come manifestazione geometrica. Esse hanno superato i limiti della meccanica classica newtoniana, rivelando la non assolutezza di spazio e tempo e l'influenza della materia e dell'energia sulla curvatura dello spazio-tempo.

La Relatività Ristretta si fonda su due postulati fondamentali: (i) le leggi della fisica sono identiche in tutti i sistemi inerziali, e (ii) la velocità della luce nel vuoto è costante e indipendente dallo stato di moto della sorgente e dell'osservatore. Da questi principi derivano la contrazione delle lunghezze, la dilatazione temporale e l'equivalenza massa-energia $E = mc^2$. Tuttavia, la teoria rimane limitata alla cinematica e dinamica in assenza di campi gravitazionali.

La Relatività Generale estende questi principi includendo la gravitazione, attraverso le equazioni di campo

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu},$$

dove $G_{\mu\nu}$ è il tensore di Einstein, $g_{\mu\nu}$ la metrica dello spazio-tempo, $T_{\mu\nu}$ il tensore energia-impulso e Λ la costante cosmologica. Questa formulazione ha trovato conferme sperimentali straordinarie: dalla precessione del perielio di Mercurio alla deflessione della luce in prossimità del Sole, fino alla rivelazione diretta delle onde gravitazionali.

Nonostante il successo delle due teorie, emergono limiti concettuali e sperimentali in contesti estremi:

1. **Singolarità gravitazionali.** La Relatività Generale predice punti di densità e curvatura infinita, come al centro dei buchi neri o all'origine del Big Bang. Tali divergenze indicano il fallimento della teoria oltre le scale di validità attese.

2. **Incompatibilità con la meccanica quantistica.** Mentre le interazioni fondamentali (elettromagnetica, nucleare debole e forte) sono descritte da teorie quantistiche di campo, la gravitazione rimane formulata in termini geometrici classici. L'unificazione con la meccanica quantistica richiede un quadro che includa naturalmente le scale di Planck.

3. **Limiti sperimentali.** Le predizioni di Einstein sono state verificate fino a scale di energia molto inferiori a quella di Planck,

$$E_p = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \approx 1.22 \times 10^{19}\,\mathrm{GeV},$$

che rappresenta il confine naturale in cui effetti quantistici della gravità non possono più essere trascurati. Per confronto, le energie raggiungibili al Large Hadron Collider sono dell'ordine di $E \sim 10^4\,\mathrm{GeV}$, quindi circa $E/E_p \sim 10^{-15}$.

4. **Problema dell'inflazione e della cosmologia primordiale.** Le soluzioni cosmologiche basate sulla Relatività Generale richiedono meccanismi addizionali (campo inflatonico, energie di vuoto) per spiegare l'orizzonte e la piattezza dell'universo. Tuttavia, tali ipotesi non derivano direttamente dalla struttura teorica della RG.

5. **Stabilità ultra-relativistica.** La cinematica di particelle con energie ultra-energetiche (raggi cosmici fino a $E \sim 10^{20}\,\mathrm{eV}$) solleva domande sulla validità del fattore di Lorentz standard

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

quando si considerano processi prossimi alla scala di Planck.

Queste problematiche rendono evidente che la Relatività Ristretta e Generale, pur essendo teorie di successo, non costituiscono l'ultima parola sulla struttura dello spazio-tempo. È necessario esplorare estensioni teoriche capaci di preservare i successi empirici di Einstein ma, al contempo, di incorporare un limite superiore di energia, E_p, che svolga un ruolo simmetrico rispetto alla velocità della luce c. La Relatività Ristretta Planckiana si inserisce in questo contesto, proponendosi come un passo naturale verso una descrizione coerente delle dinamiche fisiche ai confini estremi dell'universo.

1.2 Ruolo delle scale di Planck come nuova frontiera

Le scale di Planck, introdotte per la prima volta da Max Planck nel 1899, rappresentano le combinazioni fondamentali delle costanti universali $\hbar$ (costante di Planck ridotta), c (velocità della luce) e G (costante gravitazionale). Esse definiscono unità naturali di lunghezza, tempo, energia e massa, al di là delle quali l'attuale formulazione della fisica cessa di essere valida.

Le definizioni canoniche sono:

$$l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1.616 \times 10^{-35}\,\mathrm{m},$$

$$t_p = \frac{l_p}{c} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 5.391 \times 10^{-44}\,\mathrm{s},$$

$$m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 2.176 \times 10^{-8}\,\mathrm{kg},$$

$$E_p = m_p c^2 = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \approx 1.956 \times 10^{9}\,\mathrm{J} \approx 1.2209 \times 10^{19}\,\mathrm{GeV}.$$

Queste scale fissano i limiti naturali entro i quali si prevede che gli effetti quantistici della gravità diventino significativi. In particolare:

1. **Lunghezza di Planck** l_p Stabilisce il limite inferiore concepibile per la risoluzione spaziale. Al di sotto di tale scala, la nozione di distanza classica perde significato a causa delle fluttuazioni quantistiche del vuoto gravitazionale.

2. **Tempo di Planck** t_p Rappresenta la più piccola unità temporale dotata di senso fisico. Eventi separati da intervalli inferiori a t_p non possono essere distinti in modo univoco da alcuna teoria classica.

3. **Massa ed energia di Planck** m_p, E_p Definiscono la soglia energetica oltre la quale le collisioni di particelle o i processi gravitazionali generano effetti quantistici non trascurabili. Qualsiasi descrizione classica basata sulla Relatività Ristretta o Generale diventa inadeguata.

Le scale di Planck emergono naturalmente quando si combinano le tre costanti fondamentali secondo criteri dimensionali. Ad esempio, l'energia di Planck deriva dalla condizione

$$[E_p] = [\hbar]^{1/2}[c]^{5/2}[G]^{-1/2},$$

che è l'unica combinazione dimensionale coerente con unità di energia.

Il ruolo delle scale di Planck come frontiera teorica è duplice:

- **Limite concettuale.** Esse segnano i confini oltre i quali la separazione fra Relatività Generale e Meccanica Quantistica non è più sostenibile. Al di sopra di E_p, si ipotizza che lo spazio-tempo stesso diventi quantizzato.

- **Guida sperimentale.** Sebbene irraggiungibili nelle condizioni ordinarie di laboratorio (gli acceleratori moderni raggiungono al massimo $E \sim 10^4\,\mathrm{GeV}$), le scale di Planck potrebbero essere sondate indirettamente tramite fenomeni astrofisici e cosmologici: raggi cosmici ultra-energetici, collassi stellari, radiazione di fondo cosmica e segnali gravitazionali.

Il quadro della Relatività Ristretta Planckiana pone l'energia di Planck E_p sullo stesso piano della velocità della luce c, elevandola a costante universale e invariante. Se c rappresenta un limite superiore per le velocità meccaniche, E_p diventa un limite superiore per l'energia concentrata in un singolo evento fisico elementare, invariante in tutti i sistemi inerziali. Ciò introduce una nuova simmetria speculare che modifica profondamente la cinematica e la dinamica dei sistemi ad alta energia, fornendo una possibile via per superare i limiti interni della Relatività di Einstein e avvicinarsi a una teoria coerente della gravità quantistica.

1.3 L'energia di Planck come costante universale invariante

L'energia di Planck, definita come

$$E_p = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}},$$

rappresenta la più alta scala energetica coerente ottenibile a partire dalle tre costanti universali $\hbar$, c e G. Essa non dipende da scelte arbitrarie di unità di misura o da convenzioni particolari, ma è imposta unicamente dalla struttura dimensionale della fisica fondamentale. In tal senso, E_p si configura come un limite naturale, esattamente come la velocità della luce c funge da limite per le velocità meccaniche nella Relatività Ristretta.

Dal punto di vista della Relatività Ristretta Planckiana (RRP), il postulato di invarianza di E_p stabilisce che tale energia costituisce un massimo assoluto non superabile da alcun processo fisico elementare. Questo implica che, così come nessun corpo materiale può raggiungere $v = c$, nessun evento locale può concentrare un'energia superiore a E_p.

Formalmente, ciò si traduce nell'introduzione di un nuovo fattore di trasformazione:

$$\gamma_E(E) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{E}{E_p}\right)^2}}, \quad 0 \leq E < E_p.$$

Il limite $E \to E_p$ porta a $\gamma_E \to \infty$, analogamente al limite $v \to c$ nella Relatività di Einstein. La divergenza del fattore γ_E riflette l'impossibilità fisica di oltrepassare la soglia di E_p, garantendone così l'invarianza.

Questa proprietà di invarianza si verifica in tutti i sistemi inerziali. Consideriamo due osservatori, $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$, in moto relativo. Se un evento locale ha energia $E = E_p$ per $\mathcal{O}$, allora la trasformazione planckiana

$$E' = f(E, \beta_E),$$

con $\beta_E = E/E_p$, deve restituire ancora $E' = E_p$. Ciò garantisce che E_p non solo è un limite superiore, ma è anche identico in qualunque sistema di riferimento, esattamente come accade per c.

Un'ulteriore conseguenza della natura invariante di E_p emerge confrontando con le trasformazioni di Lorentz. Nel caso classico, la composizione di velocità rispetta la legge

$$v_{12} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}},$$

che assicura $v < c$. Nel formalismo planckiano, la composizione delle energie assume la forma

$$\beta_{12} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}, \quad \beta_i = \frac{E_i}{E_p},$$

che implica

$$E_{12} < E_p \quad \text{se } E_1, E_2 < E_p.$$

La struttura matematica assicura quindi la stabilità del bound energetico, dimostrando che E_p rimane costante e universale sotto trasformazioni e composizioni.

Dal punto di vista concettuale, l'elevazione di E_p a costante invariante modifica la gerarchia dei limiti fisici. Se la Relatività Ristretta è fondata sulla coppia (c, m_0), con m_0 massa a riposo e c limite di velocità, la Relatività Ristretta Planckiana introduce la coppia (E_p, c), in cui la velocità della luce governa la cinematica e l'energia di Planck governa la dinamica dei regimi ultra-energetici. Questo dualismo rappresenta un'estensione simmetrica del principio di relatività, stabilendo una nuova costante universale fondamentale.

1.4 Simmetria speculare tra velocità della luce c ed energia di Planck E_p

Uno degli aspetti centrali della Relatività Ristretta Planckiana (RRP) è l'introduzione di una simmetria concettuale tra due costanti universali: la velocità della luce c, che delimita lo spazio delle velocità, e l'energia di Planck E_p, che rappresenta il limite superiore delle energie fisiche localizzate. La struttura matematica è costruita in modo tale che le formule cinematiche della Relatività Ristretta vengano "specchiate" in un dominio energetico, sostituendo il rapporto v/c con E/E_p.

Nella Relatività Ristretta classica, il fattore di Lorentz è definito da:

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Questo fattore diverge quando $v \to c$, imponendo che nessun sistema materiale possa raggiungere o superare la velocità della luce.

Nel formalismo planckiano, si introduce un fattore del tutto analogo:

$$\gamma_E = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{E}{E_p}\right)^2}}.$$

In questo caso, è l'energia a essere vincolata da un limite superiore. Per $E \to E_p$, il fattore γ_E diverge, rendendo fisicamente impossibile oltrepassare E_p.

La simmetria tra le due strutture può essere messa in evidenza riscrivendo le trasformazioni. Per la cinematica relativistica, la trasformazione di Lorentz lungo la direzione x assume la forma:

$$x' = \gamma_v \, (x - vt),$$
$$t' = \gamma_v \left(t - \frac{v}{c^2} x\right).$$

La controparte planckiana si ottiene sostituendo il parametro di velocità con un parametro energetico:

$$x' = \gamma_E \, (x - u_E t),$$
$$t' = \gamma_E \left(t - \frac{u_E}{c_E^2} x\right),$$

dove

$$u_E = \frac{E}{E_p} \, c_E,$$

con c_E una costante di velocità introdotta per coerenza dimensionale.

Questa corrispondenza stabilisce una perfetta simmetria formale:

$$\frac{v}{c} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{E}{E_p},$$

$$\gamma_v \quad \longleftrightarrow \quad \gamma_E.$$

Tale dualità non è soltanto un artificio matematico, ma ha conseguenze profonde. Nella Relatività di Einstein, l'invarianza di c assicura che la struttura dello spazio-tempo sia la stessa in tutti i sistemi inerziali. Nella RRP, l'invarianza di E_p garantisce che la struttura energetica dell'universo sia la stessa in tutti i sistemi di riferimento, impedendo che processi fisici localizzati superino la soglia planckiana.

Un aspetto cruciale è che la simmetria tra c ed E_p si estende alla legge di composizione. Per le velocità, la Relatività Ristretta impone:

$$v_{12} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}},$$

che preserva il bound $v < c$. In forma speculare, la RRP definisce:

$$\beta_{12} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}, \qquad \beta_i = \frac{E_i}{E_p},$$

che preserva il bound $E < E_p$. La simmetria tra queste due leggi di composizione dimostra che la struttura di gruppo sottostante è isomorfa: in entrambi i casi l'algebra di Lie è $\mathfrak{so}(1,3)$, con la sola differenza interpretativa tra domini cinematici ed energetici.

Da un punto di vista teorico, questa simmetria speculare suggerisce l'esistenza di una "doppia relatività": una basata su c, che governa la propagazione nello spazio-tempo, e una basata su E_p, che governa i limiti energetici dei processi fisici. L'introduzione di entrambe le costanti come invarianti universali amplia il principio di relatività a un quadro più generale, in cui lo spazio-tempo e lo spazio-energia sono trattati come domini duali della stessa struttura matematica.

1.5 Obiettivi: coerenza matematica, predizioni verificabili, programma di ricerca sperimentale

La formulazione della Relatività Ristretta Planckiana (RRP) nasce dall'esigenza di estendere i principi relativistici oltre i limiti stabiliti dalle teorie einsteiniane, introducendo come nuova costante universale l'energia di Planck E_p. Gli obiettivi della teoria possono essere articolati su tre livelli complementari: (i) la consistenza matematica interna, (ii) la capacità di produrre predizioni verificabili e (iii) la definizione di un programma sperimentale per la falsificabilità.

1. Coerenza matematica. La prima esigenza è la costruzione di un formalismo rigoroso che garantisca stabilità logica e consistenza algebrica. Il cuore della RRP è l'introduzione del fattore planckiano

$$\gamma_E = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{E}{E_p}\right)^2}},$$

che ricalca il ruolo del fattore di Lorentz ma traslato nel dominio energetico. È necessario dimostrare che tale struttura preserva la proprietà di gruppo delle trasformazioni, ossia che le composizioni di boost energetici obbediscono a una legge chiusa:

$$\beta_{12} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}, \qquad \beta_i = \frac{E_i}{E_p},$$

e che questa regola assicura l'invarianza del vincolo $|E| < E_p$. Inoltre, l'analisi dei generatori

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = \epsilon_{ijk}K_k, \quad [K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk}J_k$$

mostra che l'algebra è isomorfa a $\mathfrak{so}(1,3)$, garantendo che la struttura matematica sottostante sia compatibile con il formalismo lorentziano.

2. Predizioni verificabili. La RRP deve fornire risultati concreti che si distinguano dalla Relatività Ristretta e Generale nei regimi prossimi alla scala di Planck. Tra le principali predizioni si annoverano:

- *Accelerazione del tempo proprio*: per $E \to E_p$, il rapporto

$$\frac{d\tau}{dt} = \gamma_E(E) \to \infty$$

  indica un'accelerazione del tempo fisico rispetto al tempo geometrico, con implicazioni sui processi microscopici estremi.

- *Cosmologia planckiana*: in epoche con densità energetica prossima a E_p, l'espansione dell'universo dovrebbe mostrare deviazioni osservabili rispetto agli scenari inflazionari standard.

- *Buchi neri regolari*: la sostituzione

$$T_{\mu\nu}^{\text{eff}} = \frac{T_{\mu\nu}}{\gamma_E^2}$$

  nelle equazioni di Einstein suggerisce una riduzione della singolarità centrale e la possibilità di geometrie regolari.

- *Collisioni ad altissima energia*: nei raggi cosmici ultra-energetici ($E \sim 10^{20}\,\text{eV}$) dovrebbero emergere deviazioni cinematiche misurabili rispetto alle previsioni einsteiniane.

3. Programma di ricerca sperimentale. Affinché la RRP possa essere valutata dalla comunità scientifica, occorre delineare un piano sperimentale coerente. Alcune direzioni includono:

- *Acceleratori di particelle*: anche se lontani da E_p, i futuri collisori multi-TeV (es. FCC, CEPC) potrebbero rivelare deviazioni minime da testare con precisione statistica.

- *Astrofisica delle alte energie*: l'osservazione dei raggi cosmici di massima energia e dei lampi gamma (GRB) fornisce un laboratorio naturale per sondare effetti planckiani.

- *Onde gravitazionali*: la rilevazione di segnali provenienti da collassi stellari estremi e fusione di buchi neri può essere analizzata in cerca di frequenze massime attenuate da fattori γ_E.

- *Cosmologia osservativa*: telescopi come JWST o missioni CMB di nuova generazione potrebbero misurare anomalie nel redshift cosmologico, indicativi di una dinamica planckiana.

La RRP si pone dunque come un'estensione concettualmente rigorosa della Relatività, capace di mantenere la simmetria matematica, fornire predizioni concrete e proporre scenari di test sperimentali che consentano di verificarne la validità o di escluderla.

1.6 Confronto con le estensioni relativistiche esistenti

1.6.1 Relatività a due scale invarianti (DSR) e confronto con la RRP

La Doubly Special Relativity (DSR), proposta inizialmente da Amelino-Camelia e successivamente sviluppata in diversi formalismi (κ-Poincaré, teorie con algebra deformata, ecc.), introduce accanto alla velocità della luce c una seconda costante invariante: la lunghezza di Planck L_p (o, in modo equivalente, l'energia di Planck E_p). L'obiettivo principale è quello di costruire una cinematica in cui le trasformazioni di Lorentz vengano deformate in modo tale da preservare, oltre a c, anche L_p come quantità universale.

Motivazioni della DSR. L'idea nasce dal tentativo di incorporare gli effetti quantistici della gravità senza rinunciare al principio di relatività. Poiché i modelli di gravità quantistica (stringhe, loop quantum gravity) suggeriscono l'esistenza di una lunghezza minima L_p, la DSR si propone come un'estensione naturale della Relatività Ristretta per energie $E \lesssim E_p$.

Struttura matematica. In DSR le relazioni di dispersione vengono modificate in modo covariante:

$$E^2 - c^2p^2 - m^2c^4 + f(E, p; L_p) = 0,$$

dove $f(E, p; L_p)$ rappresenta termini correttivi (ad esempio $f \sim L_p c p^2 E$). Inoltre, i boost assumono una forma non lineare nello spazio degli impulsi, del tipo:

$$\frac{dE}{d\xi} = -cp_z, \qquad \frac{dp_z}{d\xi} = -\frac{E}{c} - \frac{\tilde{L}_p}{2c^2}E^2 - \frac{\tilde{L}_p}{2}p_z^2,$$

con ξ rapidità deformata. Le trasformazioni restano coerenti con un'algebra deformata (κ-Poincaré).

Limiti concettuali e sperimentali della DSR. Nonostante la coerenza algebrica, la DSR presenta diversi problemi:

1. **Soccer-ball problem**: difficoltà a estendere la teoria a sistemi macroscopici composti da molte particelle, per i quali la deformazione dovrebbe essere trascurabile.
2. **Ambiguità nella conservazione**: esistono diverse formulazioni per le leggi di conservazione di energia e quantità di moto, non sempre univoche.
3. **Interpretazione geometrica**: la DSR agisce sullo spazio degli impulsi, senza una formulazione diretta sullo spaziotempo, se non in approcci complessi come la "relative locality".
4. **Predizioni non confermate**: inizialmente si pensava che la DSR modificasse la soglia del GZK cutoff dei raggi cosmici ultra-energetici. Tuttavia, studi successivi hanno mostrato che la DSR standard non predice alcuna soppressione del GZK cutoff, a differenza di modelli con riferimento assoluto.
5. **Velocità della luce energia-dipendente**: in molte formulazioni la DSR implica che c dipenda dall'energia. Ciò porterebbe a ritardi misurabili tra fotoni ad alta e bassa energia provenienti da lampi gamma (GRB). Tuttavia, osservazioni del Fermi-LAT (2009) hanno mostrato che fotoni fino a 31 GeV arrivano quasi simultaneamente ad altri di energia inferiore, escludendo effetti di dispersione di primo ordine anche oltre la scala di Planck.
6. **Inconsistenze teoriche**: una dipendenza energia-dipendente di c porterebbe a interazioni non locali tra particelle, già escluse dalla fisica delle alte energie. Pertanto, le versioni della

DSR con correzioni di primo ordine risultano oggi fortemente disfavorevoli.

Differenze concettuali con la RRP. La Relatività Ristretta Planckiana (RRP) si distingue nettamente:

- La costante invariante fondamentale non è la lunghezza di Planck L_p, ma *l'energia di Planck* E_p.
- La RRP mantiene intatta l'algebra di Lorentz:

  $$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k, \quad [J_i, K_j] = \epsilon_{ijk} K_k, \quad [K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk} J_k,$$

  con l'unica differenza che i boost agiscono nello spazio delle energie:

  $$\beta_E = \frac{E}{E_p}, \qquad \gamma_E = \frac{1}{\sqrt{1 - (E/E_p)^2}}.$$

- La RRP introduce una *simmetria speculare* rispetto alla RR: al posto di v/c si utilizza E/E_p, con lo stesso formalismo matematico.
- In DSR le relazioni di dispersione sono perturbative e modello-dipendenti; in RRP l'invarianza è esatta e basata su γ_E, senza ambiguità.
- Il problema della composizione non sorge in RRP: la legge di addizione energetica è la stessa delle velocità relativistiche,

  $$\beta_{12} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}, \qquad \beta_i = \frac{E_i}{E_p},$$

  che garantisce $E < E_p$ anche per processi composti.
- Inoltre, la RRP può essere vista come un'estensione teorica della *Teoria Unificata della Coscienza* (TUC)[2], in cui la stessa legge di invarianza planckiana era stata formulata in termini fenomenologici della coscienza. La RRP ne costituisce la formalizzazione in fisica classica, con l'obiettivo di verificarne la validità empirica.

[2] Cfr. De Angelis, A. (2025). *TUC – Teoria Unificata della Coscienza. Volume I: Fondamenti formali e dinamiche emergenti.* Zenodo. `10.5281/zenodo.16792942`.

Sintesi. La DSR e la RRP condividono l'idea di introdurre una nuova scala invariante, ma divergono radicalmente:

- La DSR deforma la cinematica di Lorentz e implica spesso effetti energia-dipendenti della velocità della luce, oggi esclusi sperimentalmente in prima approssimazione.
- La RRP mantiene la struttura di Lorentz ed estende il principio di relatività con una simmetria speculare tra c ed E_p, risultando più semplice, coerente e libera dalle principali criticità teoriche e sperimentali che affliggono la DSR.

1.6.2 Gravity's Rainbow e confronto con la RRP

La teoria nota come *Gravity's Rainbow*, proposta da Magueijo e Smolin (2003–2004), rappresenta un'estensione della Relatività Generale in cui la metrica dello spaziotempo dipende esplicitamente dall'energia delle particelle che lo attraversano. L'idea centrale è che la geometria percepita non sia universale, ma "arcobaleno", cioè energia-dipendente, regolata da due funzioni adimensionali $f(E/E_{Pl})$ e $g(E/E_{Pl})$. Queste, nel limite $E/E_{Pl} \to 0$, devono tendere all'unità, in modo da recuperare la Relatività Generale standard.

Motivazioni di Gravity's Rainbow. Il punto di partenza è l'analogia con la Doubly Special Relativity (DSR), dove accanto a c si introduce una seconda scala invariante legata a E_{Pl}. Gravity's Rainbow estende questa idea al settore gravitazionale, ipotizzando che la curvatura stessa possa variare in funzione dell'energia della particella test. In questo quadro, la metrica prende la forma:

$$ds^2 = -\frac{(dx^0)^2}{f^2(E/E_{Pl})} + \frac{(dx^i)^2}{g^2(E/E_{Pl})},$$

così che ogni energia definisca una "famiglia" distinta di spaziotempi.

Struttura matematica. Le equazioni di Einstein vengono modificate in maniera energia-dipendente:

$$G_{\mu\nu}(E) = 8\pi G(E)\, T_{\mu\nu}(E) + g_{\mu\nu}\Lambda(E),$$

dove sia G sia Λ diventano funzioni di E. A livello cosmologico, la metrica FRW si deforma in:

$$ds^2(E) = -\frac{dt^2}{f^2(E)} + \frac{a^2(t)}{g^2(E)}\,\gamma_{ij}dx^i dx^j,$$

con equazioni di Friedmann modificate che possono, in principio, risolvere il problema dell'orizzonte e ridurre le singolarità.

Limiti concettuali e critiche. Nonostante l'eleganza formale, Gravity's Rainbow è stata oggetto di critiche severe:

1. **Assenza di quantizzazione coerente.** Non esiste una formulazione quantistica completa che renda il modello compatibile con il Modello Standard delle particelle.
2. **Non-località.** La dipendenza della metrica dall'energia conduce a fenomeni di non-località, già esclusi dagli esperimenti di fisica delle alte energie.
3. **Ambiguità interpretativa.** La teoria non chiarisce se le funzioni f e g siano universali o dipendano dal tipo di particella. Inoltre, il principio di equivalenza risulta deformato.
4. **Critiche della comunità.** Sabine Hossenfelder ha osservato che "Rainbow Gravity non è né una teoria né un modello completo, ma solo un'idea che, nonostante oltre un decennio di lavoro, non si è sviluppata in una formulazione coerente. Non è compatibile con il Modello Standard, porta a non-località escluse e non dovrebbe essere pubblicata finché questi problemi non vengano risolti".

Differenze concettuali con la RRP. La Relatività Ristretta Planckiana (RRP) differisce radicalmente:

- In RRP non si introduce una metrica energia-dipendente: lo spaziotempo resta universale, con struttura lorentziana invariata.
- La costante invariante fondamentale è l'energia di Planck E_p, assunta come limite superiore universale, senza dipendenza da funzioni arbitrarie f e g.

- Le trasformazioni mantengono l'algebra di Lorentz intatta, con boost energetici caratterizzati da

$$\beta_E = \frac{E}{E_p}, \qquad \gamma_E = \frac{1}{\sqrt{1-(E/E_p)^2}},$$

mentre in Gravity's Rainbow la simmetria di Lorentz è deformata e sostituita da metriche energia-dipendenti.

- La RRP implementa una simmetria speculare tra velocità e energia, senza introdurre non-località né modificare il principio di equivalenza.

- Sul piano fenomenologico, Gravity's Rainbow predice variazioni della velocità della luce e orizzonti energia-dipendenti, già esclusi sperimentalmente, mentre la RRP propone effetti testabili in regimi planckiani (Big Bounce, buchi neri regolari, onde gravitazionali attenuate).

Sintesi. Gravity's Rainbow rappresenta un tentativo di estendere la DSR al settore gravitazionale, ma soffre di limiti strutturali e critiche fondamentali, che ne mettono in dubbio la validità. La Relatività Ristretta Planckiana, al contrario, conserva la coerenza algebrica della Relatività Speciale ed eleva E_p a costante universale, proponendosi come estensione più semplice, rigorosa e compatibile con i principi di località e universalità dello spaziotempo.

1.6.3 Relatività Speciale de Sitter (dSSR) e confronto con la RRP

La de Sitter Special Relativity (dSSR) nasce dall'idea di sostituire il gruppo di Poincaré, che governa la Relatività Ristretta (RR) di Einstein, con il gruppo di simmetria più ampio $SO(4,1)$ (o $SO(3,2)$ in caso anti-de Sitter). In questo quadro, lo spaziotempo non è piatto ma dotato di curvatura costante regolata dalla costante cosmologica Λ, che introduce un raggio di curvatura fondamentale

$$l^2 = \frac{3}{\Lambda}.$$

Motivazioni della dSSR. La teoria è motivata dalla volontà di includere fin dall'inizio la costante cosmologica nel principio di relatività, riconoscendo Λ come costante universale al pari di c. Inoltre, l'adozione del gruppo $SO(4,1)$ permette di descrivere in modo più naturale spazi-tempi cosmologici omogenei e isotropi, superando i limiti della Relatività Speciale che si fonda sullo spaziotempo di Minkowski.

Struttura matematica. Lo spaziotempo de Sitter può essere descritto come un iperspazio immerso in cinque dimensioni:

$$\eta_{ab}\chi^a\chi^b + (\chi^4)^2 = l^2,$$

con η_{ab} metrica di Minkowski. In coordinate stereografiche, la metrica assume la forma conforme:

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2(x)\eta_{\mu\nu}, \qquad \Omega(x) = \frac{1}{1-\sigma^2/4l^2},$$

dove $\sigma^2 = \eta_{ab}x^a x^b$. Le traslazioni ordinarie vengono sostituite da combinazioni di traslazioni e trasformazioni conformi, e le quantità conservate si ridefiniscono come correnti di Noether associate al gruppo $SO(4,1)$.

Limiti concettuali. La dSSR, pur elegante, presenta alcune criticità:

1. **Parametrizzazione arbitraria.** La costante l (o Λ) è introdotta come parametro esterno, non derivato naturalmente dalla teoria, riducendo il potere predittivo.

2. **Effetti non misurabili.** Con il valore osservato della costante cosmologica ($\Lambda \sim 10^{-52}\,\mathrm{m}^{-2}$), gli effetti cinematici di dSSR risultano estremamente piccoli e non accessibili alle osservazioni attuali.

3. **Instabilità quantistica.** Analisi di teoria quantistica dei campi su sfondi de Sitter indicano che il vuoto di Bunch–Davies può essere instabile sotto perturbazioni, sollevando dubbi sulla consistenza quantistica dello scenario.

4. **Problemi di conservazione.** La mancanza di traslazioni standard complica la definizione di energia e impulso, rendendo meno immediata la connessione con la fisica osservabile.

Differenze concettuali con la RRP. La Relatività Ristretta Planckiana (RRP) si distingue nettamente dalla dSSR:

- Nella dSSR la nuova costante universale è geometrica, il raggio di curvatura $l = \sqrt{3/\Lambda}$, mentre nella RRP la costante fondamentale è dinamica, l'energia di Planck $E_p = \sqrt{\hbar c^5/G}$.

- La dSSR si fonda sulla sostituzione del gruppo di Poincaré con $SO(4,1)$, modificando la struttura globale dello spaziotempo. La RRP, invece, mantiene intatta l'algebra di Lorentz $\mathfrak{so}(1,3)$:

  $$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k, \quad [J_i, K_j] = \epsilon_{ijk} K_k, \quad [K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk} J_k,$$

  introducendo soltanto un nuovo dominio energetico attraverso il boost planckiano

  $$\gamma_E = \frac{1}{\sqrt{1 - (E/E_p)^2}}.$$

- La dSSR descrive deviazioni su scale cosmologiche enormi, difficilmente testabili sperimentalmente; la RRP mira invece a regimi di altissima energia, in prossimità di E_p, offrendo predizioni verificabili in astrofisica delle alte energie e nelle onde gravitazionali.

- La dSSR ridefinisce le quantità di moto attraverso correnti di Noether modificate, mentre la RRP conserva le relazioni canoniche di dispersione introducendo una massa efficace $m_{\text{eff}} = m\gamma_E$ e un tensore energia-impulso attenuato

  $$T^{\text{eff}}_{\mu\nu} = \frac{T_{\mu\nu}}{\gamma_E^2}.$$

Sintesi. La de Sitter relativity rappresenta un'estensione geometrica della Relatività Speciale basata sulla costante cosmologica, con implicazioni soprattutto cosmologiche e astrofisiche. La Relatività Ristretta Planckiana, invece, introduce un limite dinamico sull'energia massima dei processi locali, con una simmetria speculare rispetto alla velocità della luce c. Le due teorie condividono l'idea di estendere il principio di relatività con una nuova costante universale, ma differiscono profondamente ma differiscono profondamente per natura, scopo e dominio fenomenologico.

2 Postulati fondamentali della Relatività Ristretta Planckiana (RRP)

Dalla combinazione delle tre costanti universali $\hbar$, c e G emergono in maniera univoca le scale di Planck, che rappresentano soglie fisiche fondamentali. Esse non sono parametri arbitrari, ma definizioni naturali che stabiliscono il confine fra regime classico e regime quantistico-gravitazionale. La loro introduzione è imprescindibile per lo sviluppo della Relatività Ristretta Planckiana (RRP).

Energia di Planck. L'energia di Planck è definita come

$$E_p = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}},$$

che in unità numeriche corrisponde a

$$E_p \approx 1.956 \times 10^9 \text{ J} \approx 1.2209 \times 10^{19} \text{ GeV}.$$

Essa rappresenta il limite superiore teorico per l'energia concentrabile in un singolo evento localizzato nello spazio-tempo. In RRP, E_p gioca il ruolo che c riveste nella Relatività Ristretta: una costante universale invariante, non superabile.

Lunghezza di Planck. La lunghezza di Planck è definita come

$$l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}},$$

con valore

$$l_p \approx 1.616 \times 10^{-35}\,\mathrm{m}.$$

Essa rappresenta la scala minima di significatività spaziale: al di sotto di l_p il concetto classico di distanza perde validità. Qualsiasi fenomeno fisico deve essere descritto tenendo conto di effetti quantistici e gravitazionali.

Tempo di Planck. Il tempo di Planck è definito come

$$t_p = \frac{l_p}{c} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}},$$

pari a

$$t_p \approx 5.391 \times 10^{-44}\,\mathrm{s}.$$

Esso rappresenta la durata minima fisicamente significativa di un intervallo temporale. In cosmologia, corrisponde all'epoca primordiale in cui le descrizioni classiche dello spazio-tempo cessano di essere applicabili.

Massa di Planck. Infine, la massa di Planck è

$$m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}},$$

con valore

$$m_p \approx 2.176 \times 10^{-8}\,\mathrm{kg}.$$

Essa costituisce la massa caratteristica per cui gli effetti quantistici e gravitazionali si bilanciano. Un corpo con massa pari a m_p ha un raggio di Schwarzschild dell'ordine della sua lunghezza d'onda Compton, un risultato che segnala la soglia critica fra descrizione quantistica e gravitazionale.

Ruolo delle scale di Planck nella RRP. Nella Relatività Ristretta Planckiana, queste scale assumono un significato operativo: - E_p è assunto come costante universale invariante, limite superiore dell'energia. - l_p e t_p definiscono le soglie inferiori di misura dello spazio e del tempo. - m_p funge da scala naturale di riferimento per la massa, oltre la quale la descrizione classica non è più sufficiente.

Queste grandezze introducono un quadro concettuale in cui la struttura dello spazio-tempo non è più indefinitamente divisibile, ma vincolata da soglie fisiche precise. La RRP si propone di estendere la coerenza della Relatività Ristretta incorporando tali limiti, così come la Relatività di Einstein ha esteso la meccanica classica imponendo l'invarianza di c.

2.1 Postulato 1 – Invarianza dell'energia di Planck

Il primo postulato della Relatività Ristretta Planckiana (RRP) stabilisce che l'*energia di Planck* costituisce una costante universale, analogamente a quanto avviene per la velocità della luce c nella Relatività Ristretta di Einstein. Tale costante rappresenta il limite superiore invalicabile per l'energia associata a un singolo evento fisico elementare o a un processo localizzato nello spazio-tempo.

L'energia di Planck è definita a partire dalle tre costanti fondamentali della fisica teorica: la costante di Planck ridotta $\hbar$, la velocità della luce c e la costante di gravitazione universale G. Essa è data da:

$$E_p = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}}.$$

Il valore numerico corrispondente risulta:

$$E_p \approx 1.956 \times 10^9\,\mathrm{J} \quad \approx 1.2209 \times 10^{19}\,\mathrm{GeV}.$$

Dalla stessa definizione emergono in maniera naturale altre quantità di scala, che costituiscono i parametri caratteristici della fisica planckiana:

$$l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1.616 \times 10^{-35}\,\mathrm{m},$$

$$t_p = \frac{l_p}{c} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 5.391 \times 10^{-44}\,\mathrm{s},$$

$$m_p = \frac{E_p}{c^2} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 2.176 \times 10^{-8}\,\mathrm{kg}.$$

Queste grandezze definiscono le *unità naturali di Planck*, che segnano il confine tra la fisica classica relativistica e il dominio quantistico-gravitazionale.

Il postulato di invarianza di E_p afferma che, così come c è la stessa in tutti i sistemi inerziali indipendentemente dal moto relativo, l'energia di Planck non dipende dallo stato inerziale di osservazione: essa è una costante universale che vincola la dinamica e la cinematica dei sistemi ad alta energia.

Dal punto di vista formale, il postulato può essere espresso come:

$$E'_p = E_p \quad \forall \text{ sistemi di riferimento inerziali.}$$

Ne consegue che nessun sistema fisico può possedere un'energia propria superiore a E_p, poiché tale valore rappresenta un limite asintotico e invalicabile. In altre parole, se nella Relatività Ristretta il vincolo fondamentale è rappresentato dall'impossibilità di superare la velocità della luce, nella Relatività Ristretta Planckiana emerge un vincolo duale: l'impossibilità di eccedere l'energia di Planck.

Questo postulato fornisce la base concettuale per l'intera struttura della teoria, poiché tutte le successive formulazioni cinematiche e dinamiche si costruiscono imponendo la coerenza matematica con tale limite assoluto.

2.2 Postulato 2 – Equivalenza della misura temporale in presenza di energia

Il secondo postulato della Relatività Ristretta Planckiana introduce un'estensione fondamentale del concetto di tempo proprio. Nella Relatività Ristretta di Einstein, il tempo proprio τ di un osservatore inerziale in moto con velocità v è connesso al tempo coordinato t da un fattore di Lorentz $\gamma(v)$:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\gamma(v)} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

In maniera speculare, la Relatività Ristretta Planckiana introduce un *fattore di estensione energetica* $\gamma_E(E)$, che lega il tempo proprio di un sistema al suo contenuto energetico totale E. La definizione formale è:

$$\gamma_E(E) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{E}{E_p}\right)^2}}, \qquad 0 \leq E < E_p.$$

La relazione tra tempo coordinato t e tempo proprio τ risulta dunque modificata in:

$$\frac{d\tau}{dt} = \gamma_E(E).$$

Questa equazione stabilisce che la misura del tempo non dipende soltanto dallo stato di moto, ma anche dal contenuto energetico del sistema fisico. Il parametro E/E_p gioca un ruolo analogo a v/c, ma in un dominio speculare: quello delle energie invece delle velocità.

Interpretazione fisica

- Per energie trascurabili rispetto a quella di Planck ($E \to 0$), si ha:

  $$\gamma_E(E) \approx 1, \qquad d\tau \approx dt,$$

  ossia il tempo proprio coincide con il tempo coordinato, recuperando il limite classico.

- Per energie prossime al limite di Planck ($E \to E_p$), il fattore γ_E diverge:

  $$\lim_{E \to E_p} \gamma_E(E) = +\infty,$$

  conseguentemente:

  $$\lim_{E \to E_p} \frac{d\tau}{dt} = +\infty.$$

  Questo implica che il tempo proprio accelera indefinitamente rispetto al tempo coordinato: un effetto opposto alla dilatazione temporale relativistica classica.

Dimostrazione della coerenza matematica
La definizione di $\gamma_E(E)$ assicura che:

$$0 \leq \frac{E}{E_p} < 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma_E(E) \in [1, +\infty).$$

Pertanto:

$$\frac{d\tau}{dt} \geq 1,$$

ossia il tempo proprio di un sistema fisico in presenza di energia scorre sempre più velocemente rispetto al tempo coordinato. Il limite inferiore $d\tau/dt = 1$ corrisponde a $E = 0$, mentre il limite superiore è asintotico, non raggiungibile fisicamente.

Conseguenze operative

1. Il tempo diviene una variabile dinamica non più universale, ma dipendente dal contenuto energetico del sistema.

2. L'effetto di *accelerazione del tempo proprio* costituisce una nuova predizione fisica: sistemi ad altissima energia evolvono internamente molto più rapidamente di quanto non indichi il tempo coordinato.

3. Questo postulato crea una simmetria speculare con la Relatività Ristretta: mentre in Einstein l'aumento di velocità rallenta il tempo proprio, nella RRP l'aumento di energia accelera il tempo proprio.

2.3 Postulato 3 – Simmetria speculare tra c ed E_p

Il terzo postulato della Relatività Ristretta Planckiana (RRP) introduce una simmetria formale tra la costante universale della velocità della luce c e l'energia di Planck E_p. In Relatività Ristretta (RR), la dinamica dei sistemi inerziali è governata dal fattore di Lorentz

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

dove v rappresenta la velocità relativa tra due sistemi di riferimento. Questo fattore genera fenomeni ben noti come la dilatazione temporale e la contrazione spaziale.

In analogia, la RRP definisce un fattore di trasformazione planckiano, costruito a partire dal rapporto tra l'energia del sistema e l'energia di Planck:

$$\gamma_E = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{E}{E_p}\right)^2}},$$

dove $0 \leq E < E_p$. Questo fattore governa trasformazioni cinematiche che risultano speculari a quelle einsteiniane, ma con effetti invertiti: accelerazione del tempo proprio e dilatazione spaziale.

Le trasformazioni generali tra due sistemi inerziali in regime planckiano assumono la forma

$$x' = \gamma_E (x - u_E t),$$

$$t' = \gamma_E \left(t - \frac{u_E}{c_E^2} x\right),$$

dove la quantità u_E è definita come

$$u_E = \frac{E}{E_p} c_E,$$

con c_E una costante di velocità introdotta per garantire coerenza dimensionale.

Queste relazioni mostrano che la RRP conserva la struttura matematica della RR, ma sostituendo formalmente il rapporto v/c con E/E_p. Ne consegue che:

- per $E \ll E_p$, si ha $\gamma_E \approx 1$ e le trasformazioni si riducono a quelle classiche newtoniane;
- per $v \ll c$, si ha $\gamma_v \approx 1$ e la RR recupera la meccanica classica.

La simmetria $v/c \leftrightarrow E/E_p$ stabilisce dunque un dualismo formale tra la dinamica dei sistemi ad alta velocità e quella dei sistemi ad alta energia, fornendo una nuova struttura di gruppo che mantiene invariante l'intervallo planckiano:

$$s_E^2 = (c_E t)^2 - |x|^2.$$

In questo modo, la RRP estende la cinematica relativistica, vincolando non solo le velocità massime raggiungibili, ma anche le energie massime consentite a un sistema inerziale.

3 Cinematica planckiana

3.1 4-coordinate planckiane e nuova metrica

Per estendere la struttura spazio-temporale einsteiniana all'ambito energetico-planckiano, introduciamo una nuova definizione di quadrivettore, che incorpora l'energia come parametro fondamentale di trasformazione.

Definiamo la **quattro-coordinata energetica** come

$$X^\mu = \left(c_E t,\, x\right)$$

dove c_E è una costante di velocità che assicura la coerenza dimensionale, analoga al ruolo della velocità della luce c nella Relatività Ristretta classica.

La metrica adottata mantiene la forma minkowskiana:

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$$

così che l'intervallo planckiano risulti definito da:

$$s_E^2 = (c_E t)^2 - |x|^2.$$

Questa struttura garantisce l'invarianza dell'intervallo sotto trasformazioni di boost planckiani.

Parametro di boost energetico. Il parametro di boost energetico è definito come:

$$\beta_E = \frac{u_E}{c_E} = \frac{E}{E_p}, \quad |\beta_E| < 1$$

dove E rappresenta l'energia caratteristica del sistema inerziale considerato, ed E_p è l'energia di Planck, limite superiore invalicabile.

Il corrispondente **fattore di Lorentz planckiano** è dato da:

$$\gamma_E = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_E^2}}.$$

Dimostrazione di coerenza con il formalismo relativistico. Consideriamo due sistemi inerziali planckiani, in moto relativo con energia associata E. L'invarianza dell'intervallo richiede che:

$$(c_E t')^2 - |x'|^2 = (c_E t)^2 - |x|^2 = s_E^2.$$

Le trasformazioni compatibili con tale condizione devono necessariamente coinvolgere il parametro $\beta_E = E/E_p$. Applicando la definizione di γ_E, si verifica che il boost planckiano soddisfa la relazione:

$$B_E^T \, \eta \, B_E = \eta,$$

ossia appartiene al gruppo $SO(1,3)$, confermando che la struttura algebrica della cinematica resta identica a quella della Relatività Ristretta, con la sostituzione:

$$\frac{v}{c} \quad \longrightarrow \quad \frac{E}{E_p}.$$

Interpretazione fisica.

1. Per $E \ll E_p$, si ha $\gamma_E \approx 1$, e la cinematica planckiana si riduce alla forma classica, recuperando i risultati della Relatività Speciale.

2. Per $E \to E_p$, il fattore $\gamma_E \to \infty$, indicando che il tempo proprio accelera indefinitamente, introducendo una dinamica radicalmente diversa rispetto alla dilatazione temporale einsteiniana.

3.2 Boost energetici: parametro β_E e fattore γ_E

Il cuore della Relatività Ristretta Planckiana (RRP) risiede nella sostituzione concettuale del parametro di boost classico, espresso in termini di velocità relativa v rispetto alla costante fondamentale c, con un nuovo parametro energetico che mette in relazione l'energia di un sistema fisico con l'energia di Planck E_p.

Definizione del parametro di boost energetico.

Si definisce il parametro adimensionale:

$$\beta_E = \frac{u_E}{c_E} = \frac{E}{E_p}, \qquad |\beta_E| < 1,$$

dove E rappresenta l'energia associata al sistema inerziale considerato, $E_p = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}}$ è l'energia di Planck, e c_E è una costante di velocità introdotta per mantenere la consistenza dimensionale delle trasformazioni. La condizione $|\beta_E| < 1$ garantisce che l'energia di un sistema non superi mai E_p, analogamente a come nella Relatività Ristretta classica non è possibile avere $|v| \geq c$.

Definizione del fattore di Lorentz planckiano.

Il fattore di dilatazione energetica, analogo al fattore di Lorentz γ, è definito come:

$$\gamma_E = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_E^2}}.$$

Esplicitando in funzione dell'energia del sistema:

$$\gamma_E(E) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{E}{E_p}\right)^2}}.$$

Analisi dei limiti.

1. Per energie molto inferiori a quella di Planck:

   $$E \ll E_p \quad \Rightarrow \quad \gamma_E \approx 1,$$

   il che implica che le trasformazioni planckiane coincidono con quelle classiche, recuperando la meccanica di Newton.

2. Nel limite di energie prossime a E_p:

$$E \to E_p \quad \Rightarrow \quad \gamma_E \to \infty,$$

si osserva un'accelerazione indefinita del tempo proprio e una dilatazione spaziale, in simmetria con la dilatazione temporale e la contrazione spaziale della Relatività Ristretta classica.

Osservazione sulla simmetria.

La struttura formale delle trasformazioni planckiane risulta speculare a quella della Relatività Ristretta: mentre il vincolo fondamentale di Einstein è rappresentato dalla costanza della velocità della luce c, nella RRP il ruolo è assunto dall'invarianza dell'energia di Planck E_p. Questa dualità stabilisce un parallelismo matematico tra $\frac{v}{c}$ e $\frac{E}{E_p}$, entrambi vincolati da un limite insuperabile e regolati da un fattore di Lorentz γ o γ_E.

Dimostrazione della coerenza matematica.

Per verificare la consistenza formale del nuovo parametro, si osservi che la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad |x| < 1,$$

è analitica e crescente, con $f(0) = 1$ e $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$. Ponendo $x = \beta_E = E/E_p$ si ottiene che γ_E mantiene le stesse proprietà formali del fattore di Lorentz classico, ma traslate nello spazio energetico. Pertanto, l'intera struttura matematica della Relatività Ristretta può essere replicata sostituendo:

$$\frac{v}{c} \longrightarrow \frac{E}{E_p}.$$

3.3 Invariante planckiano e struttura del gruppo di simmetria

Il passo cruciale per la consistenza interna della Relatività Ristretta Planckiana (RRP) è la dimostrazione che l'intervallo spazio-energetico resta invariante sotto le trasformazioni di boost planckiano. Tale proprietà garantisce che la nuova cinematica sia fondata su un gruppo di simmetria ben definito, analogo al gruppo di Lorentz.

Definizione dell'intervallo planckiano.

Si definisce l'intervallo quadratico come:

$$s_E^2 = (c_E t)^2 - |\vec{x}|^2,$$

dove $\vec{x}$ rappresenta la componente spaziale delle coordinate planckiane e c_E è la costante di velocità introdotta in §3.1.

Dimostrazione dell'invarianza.

Consideriamo una trasformazione di boost planckiano lungo l'asse x:

$$\left\{ r \begin{aligned} x' &= \gamma_E(x - \beta_E c_E t), \\ t' &= \gamma_E \left(t - \tfrac{\beta_E}{c_E} x\right), \end{aligned}\right.$$

con $\beta_E = E/E_p$ e $\gamma_E = (1 - \beta_E^2)^{-1/2}$.

Calcoliamo l'intervallo trasformato:

$$(c_E t')^2 - (x')^2 = \gamma_E^2 \Big[(c_E t - \beta_E x)^2 - (x - \beta_E c_E t)^2\Big].$$

Sviluppando i quadrati e raccogliendo i termini si ottiene:

$$(c_E t')^2 - (x')^2 = \gamma_E^2 (1 - \beta_E^2) \big[(c_E t)^2 - x^2\big].$$

Poiché per definizione $\gamma_E^2(1 - \beta_E^2) = 1$, segue che:

$$(c_E t')^2 - (x')^2 = (c_E t)^2 - x^2 = s_E^2,$$

ovvero l'intervallo planckiano è invariante sotto boost energetici.

Struttura di gruppo.

L'invarianza appena dimostrata implica che i boost planckiani formano un gruppo con le seguenti proprietà:

1. *Chiusura:* la composizione di due boost planckiani è ancora un boost planckiano, eventualmente accompagnato da una rotazione di Wigner in 3D. In una dimensione si ha la legge esatta:

$$\beta_{12} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}.$$

2. *Esistenza dell'identità:* il boost nullo $\beta_E = 0$ lascia invariato lo spazio-energia.

3. *Esistenza dell'inverso:* ad ogni boost con parametro β_E corrisponde un boost inverso con parametro $-\beta_E$.

4. *Associatività:* la composizione di boost rispetta la proprietà associativa, come garantito dalla parametrizzazione tramite rapidità energetica:

$$\tanh(\phi_E) = \beta_E,$$

per cui:

$$B(\phi_2)B(\phi_1) = B(\phi_1 + \phi_2).$$

Interpretazione.
L'insieme delle trasformazioni planckiane preserva l'invarianza dell'intervallo s_E^2 e genera un gruppo isomorfo a $SO(1,3)$, esattamente come nel caso della Relatività Ristretta classica. La differenza risiede nel fatto che il parametro fondamentale non è più il rapporto v/c, ma la quantità adimensionale E/E_p, vincolata dal limite $|E| < E_p$. Questo stabilisce un parallelismo formale e al tempo stesso un'estensione concettuale, che radica la dinamica relativistica nello spazio delle energie oltre che nello spazio-tempo.

3.4 Rotazione di Wigner in 3D (composizione di boost non collineari)

Nella Relatività Ristretta Planckiana (RRP), come nella Relatività Ristretta di Einstein, la composizione di due boost non collineari non produce semplicemente un ulteriore boost, ma genera anche una rotazione supplementare detta *rotazione di Wigner* (o di Thomas). Questo fenomeno è una conseguenza diretta della non commutatività dei boost nello spazio delle trasformazioni di Lorentz e ne preserva la struttura di gruppo.

Convenzioni.

Siano dati due boost planckiani caratterizzati da energie E_1 e E_2, direzioni unitarie $\hat{n}_1, \hat{n}_2$ e parametri energetici:

$$\beta_i = \frac{E_i}{E_p}, \qquad \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_i^2}}, \qquad \phi_i = \operatorname{artanh}(\beta_i),$$

con $\tanh(\phi_i) = \beta_i$, $\cosh(\phi_i) = \gamma_i$, $\sinh(\phi_i) = \gamma_i\beta_i$.

Composizione dei boost.

Il prodotto di due boost planckiani è della forma:

$$B_E(\hat{n}_2, \phi_2)\, B_E(\hat{n}_1, \phi_1) = R_W(\Omega, \hat{k})\, B_E(\hat{n}_{12}, \phi_{12}),$$

dove R_W è la rotazione di Wigner di angolo Ω attorno all'asse $\hat{k} \parallel (\hat{n}_2 \times \hat{n}_1)$, e $B_E(\hat{n}_{12}, \phi_{12})$ è un boost equivalente lungo la direzione risultante $\hat{n}_{12}$.

La direzione del boost risultante è:

$$\hat{n}_{12} = \frac{\beta_{12}^{\parallel}\hat{n}_1 + \beta_{12}^{\perp}}{|\beta_{12}^{\parallel}\hat{n}_1 + \beta_{12}^{\perp}|},$$

dove:

$$\beta_2^{\parallel} = \beta_2(\hat{n}_2 \cdot \hat{n}_1), \qquad \beta_2^{\perp} = \beta_2\left(\hat{n}_2 - (\hat{n}_2 \cdot \hat{n}_1)\hat{n}_1\right).$$

La legge di composizione energetica risulta identica a quella einsteiniana con la sostituzione $v/c \mapsto E/E_p$:

$$\beta_{12}^{\parallel} = \frac{\beta_1 + \beta_2^{\parallel}}{1 + \beta_1\beta_2^{\parallel}}, \qquad \beta_{12}^{\perp} = \frac{\beta_2^{\perp}}{\gamma_1(1 + \beta_1\beta_2^{\parallel})}.$$

Angolo di rotazione di Wigner.

L'asse di rotazione è:

$$\hat{k} = \frac{\hat{n}_2 \times \hat{n}_1}{|\hat{n}_2 \times \hat{n}_1|},$$

e l'angolo di rotazione Ω è determinato da:

$$\tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)\hat{k} = \frac{\sinh(\phi_1/2)\sinh(\phi_2/2)(\hat{n}_2 \times \hat{n}_1)}{\cosh(\phi_1/2)\cosh(\phi_2/2) + \cos\theta\, \sinh(\phi_1/2)\sinh(\phi_2/2)},$$

dove $\cos\theta = \hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2$.

In termini di γ_i, la stessa relazione diventa:

$$\tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)\hat{k} = \frac{\sqrt{(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)}(\hat{n}_2 \times \hat{n}_1)}{\sqrt{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)} + \cos\theta\sqrt{(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)}}.$$

Limite debole.

Per piccoli valori dei parametri ($|\beta_i| \ll 1$, $\phi_i \approx \beta_i$), si ottiene lo sviluppo al secondo ordine:

$$\Omega\,\hat{k} \approx \tfrac{1}{2}\,\beta_1\beta_2\,(\hat{n}_2 \times \hat{n}_1),$$

che mostra come l'angolo di Wigner emerga al secondo ordine in β, in perfetta analogia con la Relatività Ristretta classica.

Proprietà di gruppo.

La presenza della rotazione di Wigner implica la non commutatività dei boost planckiani:

$$B_E(\hat{n}_2, \phi_2)B_E(\hat{n}_1, \phi_1) \neq B_E(\hat{n}_1, \phi_1)B_E(\hat{n}_2, \phi_2).$$

Il "difetto di commutatività" è compensato esattamente da una rotazione, confermando che il gruppo delle trasformazioni planckiane è isomorfo a $SO(1, 3)$.

Interpretazione fisica.

La rotazione di Wigner rappresenta un effetto cinematico inevitabile nella composizione di boost non collineari. Nella RRP essa conserva tutte le proprietà note della Relatività Ristretta classica, ma dipende dal rapporto energetico E/E_p. La sua presenza assicura la coerenza interna del gruppo di simmetria e gioca un ruolo fondamentale nell'analisi delle trasformazioni di spin e delle proprietà delle particelle ultra-energetiche.

3.5 Algebra di Lie associata e isomorfismo con so(1, 3)

La consistenza della Relatività Ristretta Planckiana (RRP) non è garantita soltanto dall'invarianza dell'intervallo planckiano (§3.3), ma anche dalla struttura algebrica dei generatori delle trasformazioni. Analogamente alla Relatività Ristretta classica, le simmetrie fondamentali della RRP sono descritte dal gruppo di Lorentz, la cui algebra di Lie è isomorfa a $\mathrm{so}(1,3)$. In questa sezione dimostriamo che i generatori delle rotazioni e dei boost energetici soddisfano esattamente le stesse relazioni di commutazione.

Generatori delle rotazioni e dei boost energetici

Consideriamo lo spazio planckiano con coordinate quadridimensionali:

$$X^\mu = (c_E t, x), \qquad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

I generatori delle rotazioni spaziali J_i e dei boost energetici K_i sono definiti in analogia alla rappresentazione canonica del gruppo di Lorentz:

$$(J_i)^\mu{}_\nu = i(\delta^\mu_i \delta_{j\nu} - \delta^\mu_j \delta_{i\nu}), \qquad (K_i)^\mu{}_\nu = i(\delta^\mu_0 \delta_{i\nu} + \delta^\mu_i \delta_{0\nu}),$$

dove $i, j = 1, 2, 3$ e δ^μ_ν è il delta di Kronecker.

Relazioni di commutazione

Calcoliamo i commutatori tra i generatori:

1. Tra rotazioni:

$$[J_i, J_j] = i\,\epsilon_{ijk} J_k.$$

2. Tra rotazioni e boost energetici:

$$[J_i, K_j] = i\,\epsilon_{ijk} K_k.$$

3. Tra boost energetici:

$$[K_i, K_j] = -i\,\epsilon_{ijk} J_k.$$

Queste tre relazioni sono identiche a quelle dell'algebra di Lie del gruppo di Lorentz classico.

Isomorfismo con $\mathrm{so}(1,3)$

Le relazioni di commutazione sopra riportate definiscono l'algebra $\mathrm{so}(1,3)$, che governa le simmetrie dello spazio di Minkowski. Ne consegue che il gruppo delle trasformazioni della RRP, costruito a partire dai boost energetici parametrizzati da $\beta_E = E/E_p$ e dalle rotazioni spaziali ordinarie, è isomorfo al gruppo di Lorentz classico:

$$g_{\mathrm{RRP}} \cong \mathrm{so}(1,3).$$

Osservazioni

- L'invarianza dell'intervallo planckiano (§3.3) e la struttura di gruppo garantita da queste relazioni mostrano che la RRP è matematicamente consistente e perfettamente integrata nella cornice delle teorie di simmetria relativistiche.
- La sostituzione $v/c \mapsto E/E_p$ non altera l'algebra sottostante, ma ne offre una nuova interpretazione fisica: i limiti cinematici non riguardano la velocità, bensì l'energia.
- L'isomorfismo con $\mathrm{so}(1,3)$ implica che la teoria può essere trattata con gli stessi strumenti rappresentazionali usati in teoria dei campi relativistici, inclusa la decomposizione in rappresentazioni irriducibili (scalari, spinori e tensori).

4 Tempo proprio e clock planckiano

4.1 Separazione fra tempo geometrico e tempo fisico

Nella Relatività Ristretta di Einstein il tempo proprio τ è definito a partire dall'intervallo minkowskiano:

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2}\, ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}\, d\vec{x}^{\,2},$$

che rappresenta una quantità puramente geometrica, indipendente dallo stato energetico del sistema.

Nella Relatività Ristretta Planckiana (RRP), invece, occorre distinguere due nozioni di tempo:

1. *Tempo proprio geometrico*, definito dall'invariante planckiano introdotto in §3.1:

$$d\tau_{\text{geo}}^2 = \frac{1}{c_E^2}\, ds_E^2 = dt^2 - \frac{1}{c_E^2}\, d\vec{x}^{\,2},$$

   dove c_E è la costante di velocità che garantisce omogeneità dimensionale. Questa definizione mantiene la struttura lorentziana della cinematica.

2. *Tempo proprio fisico*, ovvero la misura effettiva scandita da un "orologio planckiano", che tiene conto della dipendenza energetica del flusso temporale. Esso viene ottenuto introducendo il fattore $\gamma_E(E)$ definito in §3.2:

$$d\tau_{\text{phys}} = \gamma_E(E)\, d\tau_{\text{geo}}, \qquad \gamma_E(E) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{E}{E_p}\right)^2}}.$$

Dimostrazione della coerenza.
Partendo dall'intervallo planckiano:

$$s_E^2 = (c_E t)^2 - |\vec{x}|^2,$$

si definisce come in RR il tempo proprio geometrico:

$$d\tau_{\text{geo}} = \frac{1}{c_E}\sqrt{(c_E dt)^2 - d\vec{x}^{\,2}}.$$

Poiché tale quantità è invariante sotto i boost planckiani, essa fornisce una misura universale indipendente dal sistema di riferimento.

Tuttavia, per incorporare il postulato 2 della RRP, secondo cui il tempo proprio dipende dall'energia totale E, si introduce una correzione moltiplicativa tramite $\gamma_E(E)$. La costruzione:

$$d\tau_{\text{phys}} = \gamma_E(E)\, d\tau_{\text{geo}}$$

garantisce che:

- per $E \ll E_p$ si ha $\gamma_E \approx 1$ e dunque $d\tau_{\text{phys}} \approx d\tau_{\text{geo}}$, recuperando il limite einsteiniano;
- per $E \to E_p$, $\gamma_E \to \infty$ e il tempo fisico diverge rispetto a quello geometrico, introducendo l'effetto di accelerazione del tempo proprio.

Interpretazione.
La separazione fra tempo geometrico e tempo fisico consente di preservare la struttura matematica del gruppo di simmetria (che resta isomorfo a $SO(1,3)$) e, al contempo, di introdurre un effetto dinamico nuovo, direttamente collegato all'energia. In questo quadro, il tempo proprio non è soltanto una variabile geometrica derivata dalla metrica, ma diventa una grandezza fisica dipendente dal contenuto energetico del sistema considerato.

4.2 Accelerazione del tempo proprio per $E \to E_p$

Un aspetto distintivo della Relatività Ristretta Planckiana (RRP) è la predizione che il tempo proprio misurato da un sistema fisico non rimane invariato al crescere dell'energia, ma subisce un'accelerazione quando l'energia totale E si avvicina al limite universale E_p.

Definizione formale.
Dal postulato 2 (§2.2) il tempo proprio fisico è legato al tempo geometrico dall'espressione:

$$d\tau_{\text{phys}} = \gamma_E(E)\, d\tau_{\text{geo}}, \qquad \gamma_E(E) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{E}{E_p}\right)^2}}.$$

Analisi dei limiti.

1. Per energie molto inferiori a quella di Planck:

   $$E \ll E_p \quad \Rightarrow \quad \gamma_E(E) \approx 1,$$

   e dunque:

   $$d\tau_{\text{phys}} \approx d\tau_{\text{geo}},$$

   recuperando il comportamento della Relatività Ristretta di Einstein.

2. Nel limite di energie prossime a E_p:

$$E \to E_p \quad \Rightarrow \quad \gamma_E(E) \to +\infty,$$

per cui il tempo fisico cresce indefinitamente rispetto al tempo geometrico. Si parla di *accelerazione del tempo proprio*, fenomeno speculare alla dilatazione temporale della RR.

Dimostrazione esplicita.

Consideriamo un osservatore inerziale che misura il tempo proprio di un sistema con energia E. L'integrale del tempo fisico lungo una traiettoria è:

$$\tau_{\text{phys}} = \int \gamma_E(E)\, d\tau_{\text{geo}}.$$

Se E rimane costante durante l'evoluzione, si ottiene:

$$\tau_{\text{phys}} = \gamma_E(E)\, \tau_{\text{geo}}.$$

Pertanto, per un intervallo di tempo coordinato Δt con moto rettilineo uniforme ($d\vec{x} = 0$):

$$\Delta\tau_{\text{geo}} = \Delta t, \qquad \Delta\tau_{\text{phys}} = \gamma_E(E)\, \Delta t.$$

Quindi, al crescere di E, l'intervallo di tempo proprio fisico registrato dal sistema aumenta più rapidamente dell'intervallo di tempo coordinato. In particolare, al limite $E \to E_p$:

$$\frac{\Delta\tau_{\text{phys}}}{\Delta t} \to +\infty.$$

4.3 Interpretazione fisica e possibili osservabili

La separazione tra tempo geometrico e tempo fisico (§4.1) e l'accelerazione del tempo proprio per $E \to E_p$ (§4.2) hanno conseguenze profonde non soltanto concettuali, ma anche empiriche. In questa sezione discutiamo l'interpretazione fisica di tali effetti e individuiamo alcuni possibili osservabili in grado di testare la Relatività Ristretta Planckiana (RRP).

Interpretazione fisica.

Nella Relatività Ristretta classica, il parametro fondamentale è la velocità relativa v, limitata da c, e l'effetto principale è la dilatazione temporale. Nella RRP, invece, il parametro fondamentale è l'energia E limitata da E_p, e l'effetto principale è l'accelerazione del tempo proprio.

Il parallelismo tra le due teorie è riassumibile come segue:

$$\frac{v}{c} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{E}{E_p}, \qquad \Delta t' = \gamma_v \Delta t \quad \longleftrightarrow \quad \Delta\tau_{\text{phys}} = \gamma_E(E)\Delta t.$$

Questa simmetria suggerisce che la struttura dello spazio-tempo-energia obbedisca a principi di dualità: la costanza di c vincola le trasformazioni cinematiche nello spazio-tempo, mentre l'invarianza di E_p vincola le trasformazioni cinematiche nello spazio-energia.

Possibili osservabili.

1. *Raggi cosmici ultra-energetici.* Per energie dell'ordine $E \sim 10^{20}\,\text{eV}$, vicine ma non pari a E_p, la correzione introdotta da γ_E potrebbe produrre deviazioni misurabili negli spettri energetici osservati da esperimenti come Auger e Telescope Array. In particolare, si prevede una modifica nella distribuzione angolare e nell'attenuazione del flusso sopra la soglia di GZK.

2. *Oscillatori naturali ad alta energia.* Sistemi con frequenze intrinseche ν prossime a $\nu_p = \sqrt{c^5/(\hbar G)}$ vedrebbero un'accelerazione della frequenza osservata, con:

   $$\nu_{\text{obs}} = \gamma_E(E)\,\nu_{\text{geo}},$$

   il che porterebbe a uno shift misurabile rispetto alla previsione relativistica classica.

3. *Buchi neri e collassi gravitazionali.* Nei processi di collasso verso densità planckiane, il tempo fisico interno potrebbe accelerare rispetto a quello esterno, generando segnali gravitazionali con frequenze modificate secondo:

   $$f_{\text{obs}} = \frac{f_{\text{geo}}}{\gamma_E(E_{\text{curv}})}.$$

Questa deviazione potrebbe essere testata con gli interferometri gravitazionali di nuova generazione (Einstein Telescope, Cosmic Explorer).

4. *Cosmologia primordiale.* Durante le epoche in cui l'energia media per grado di libertà si avvicinava a E_p, la rapidissima accelerazione del tempo proprio avrebbe potuto determinare una fase di espansione ultra-veloce, alternativa o complementare all'inflazione. Ciò produrrebbe impronte osservabili nello spettro delle anisotropie cosmiche della radiazione di fondo (CMB).

Sintesi.

Gli osservabili proposti mostrano che la RRP non è soltanto un costrutto matematico, ma fornisce predizioni fisiche concrete, confrontabili con dati sperimentali e osservativi. L'identificazione di firme univoche legate all'accelerazione del tempo proprio rappresenta la via maestra per testare e, se necessario, falsificare la teoria.

5 Dinamica estesa

5.1 Estensione dell'azione di Einstein–Hilbert con γ_E

Per estendere la dinamica gravitazionale alla Relatività Ristretta Planckiana (RRP) si introduce una modifica all'azione di Einstein–Hilbert, in modo da includere l'effetto del fattore planckiano γ_E. L'idea di base è che l'energia effettiva di un sistema non si traduca integralmente come sorgente della curvatura, ma sia "attenuata" da un peso dipendente da γ_E, definito come

$$\gamma_E(E) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{E}{E_p}\right)^2}}, \qquad 0 \leq E < E_p,$$

dove E_p è l'energia di Planck.

Si definisce allora il peso planckiano della materia come

$$f(E) = \frac{1}{\gamma_E(E)^2} = 1 - \left(\frac{E}{E_p}\right)^2.$$

L'azione totale della teoria assume la forma:

$$S = S_g + S_m^{(\text{eff})},$$

dove:

$$S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g}\,(R - 2\Lambda)$$

è il termine gravitazionale usuale di Einstein–Hilbert, e

$$S_m^{(\text{eff})} = \int d^4x \sqrt{-g}\, f(E)\, \mathcal{L}_m(g, \psi)$$

è il termine di materia "ponderato" dal fattore $f(E)$.

In questa formulazione, $\mathcal{L}_m$ rappresenta la lagrangiana canonica della materia, mentre $f(E)$ modula la sua capacità di generare curvatura. Si recupera così, al livello variazionale, un tensore energia–impulso efficace del tipo:

$$T_{\mu\nu}^{(\text{eff})} = f(E)\, T_{\mu\nu}.$$

Osserviamo che, nel limite $E \ll E_p$, si ha $f(E) \to 1$, quindi:

$$T_{\mu\nu}^{(\text{eff})} \to T_{\mu\nu},$$

e l'azione totale si riduce a quella della Relatività Generale standard.

Questa scelta è coerente con i postulati della RRP: il limite superiore di energia E_p si traduce, a livello dinamico, in un'attenuazione progressiva delle sorgenti di curvatura man mano che l'energia si avvicina a E_p. In particolare, per $E \to E_p$ si ha $f(E) \to 0$, e la materia non contribuisce più alla curvatura, evitando così divergenze e singolarità.

In sintesi, l'estensione dell'azione di Einstein–Hilbert con il fattore γ_E realizza un meccanismo di "protezione planckiana" della dinamica gravitazionale, assicurando la continuità con la teoria di Einstein a basse energie e introducendo nuove proprietà nel regime ultra-energetico.

5.2 Derivazione variazionale: equazioni di campo modificate

A partire dall'azione estesa introdotta nella sezione precedente,

$$S = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g}\,(R - 2\Lambda) + \int d^4x \sqrt{-g}\, f(E)\, \mathcal{L}_m(g, \psi),$$

con

$$f(E) = \frac{1}{\gamma_E^2} = 1 - \left(\frac{E}{E_p}\right)^2, \qquad \gamma_E(E) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{E}{E_p}\right)^2}},$$

si ottengono le equazioni di campo modificate tramite variazione rispetto alla metrica $g^{\mu\nu}$.

Variazione del termine gravitazionale.

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g}\; (G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu})\, \delta g^{\mu\nu}.$$

Variazione del termine di materia. Il termine di materia esteso è

$$S_m^{(\text{eff})} = \int d^4x \sqrt{-g}\, f(E)\, \mathcal{L}_m(g, \psi).$$

La sua variazione è

$$\delta S_m^{(\text{eff})} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g}\, f(E)\, T_{\mu\nu}\, \delta g^{\mu\nu},$$

dove

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \left(\int d^4x \sqrt{-g}\, \mathcal{L}_m \right)$$

è il tensore energia–impulso canonico della materia.

Poiché $f(E)$ non dipende esplicitamente da $g^{\mu\nu}$, esso esce dalla variazione come fattore moltiplicativo.

Equazioni di campo. Richiedendo $\delta S = 0$ per variazioni arbitrarie di $g^{\mu\nu}$, si ottiene:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} f(E) \, T_{\mu\nu}.$$

Introducendo il tensore energia–impulso efficace,

$$T^{(\mathrm{eff})}_{\mu\nu} = f(E) \, T_{\mu\nu} = \frac{1}{\gamma_E^2} \, T_{\mu\nu},$$

le equazioni assumono la forma compatta:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \, T^{(\mathrm{eff})}_{\mu\nu}.$$

Discussione. Il risultato mostra che la curvatura spazio-temporale non è più proporzionale direttamente all'energia della materia, ma a una versione "attenuata" da $f(E)$. Questo garantisce che, per $E \ll E_p$, si recuperi il limite della Relatività Generale ordinaria, mentre per $E \to E_p$ il contributo della materia si annulli progressivamente, prevenendo divergenze nella curvatura.

La derivazione variazionale dimostra quindi che l'invarianza dell'energia di Planck si riflette in una modifica diretta delle equazioni di Einstein, senza alterare la struttura geometrica di base ma modificando il ruolo dinamico della sorgente di curvatura.

5.3 Conservazione, identità di Bianchi e consistenza matematica

Un requisito fondamentale di ogni estensione coerente della Relatività Generale è la compatibilità con l'identità di Bianchi, che assicura la consistenza matematica delle equazioni di campo e la conservazione dell'energia-impulso. Nella Relatività Ristretta Planckiana (RRP), la presenza del fattore di attenuazione energetica γ_E modifica il tensore energia-impulso, ma la struttura geometrica rimane vincolata dalle proprietà differenziali del tensore di Einstein.

Identità di Bianchi

Per la curvatura riemanniana vale l'identità differenziale:

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0,$$

dove $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ è il tensore di Einstein. Questa identità, puramente geometrica, non dipende dalla scelta della materia sorgente e garantisce la coerenza formale delle equazioni di campo.

Equazioni di campo RRP

Le equazioni di campo nella formulazione planckiana sono:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{(eff)}_{\mu\nu},$$

con

$$T^{(eff)}_{\mu\nu} = \frac{1}{\gamma_E^2} T_{\mu\nu},$$

dove $T_{\mu\nu}$ è il tensore energia-impulso ordinario della materia. La funzione di attenuazione è definita come:

$$\gamma_E(E) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{E}{E_p}\right)^2}}, \qquad 0 \le E < E_p.$$

Compatibilità con l'identità di Bianchi

Applicando la derivata covariante all'equazione di campo, si ottiene:

$$\nabla^\mu \left(G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \right) = \frac{8\pi G}{c^4} \nabla^\mu T^{(eff)}_{\mu\nu}.$$

Poiché $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ e $\nabla^\mu g_{\mu\nu} = 0$, segue:

$$\nabla^\mu T^{(eff)}_{\mu\nu} = 0.$$

Questo vincolo è soddisfatto se γ_E è costante. In tale caso, l'energia-impulso effettiva si conserva esattamente, analogamente alla Relatività Generale.

Caso con $\gamma_E = \gamma_E(x)$ variabile

Se il fattore planckiano dipende dalle coordinate spazio-temporali, $\gamma_E = \gamma_E(x)$, il calcolo produce:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(eff)} = -T_{\mu\nu}\, \nabla^\mu \left(\ln \gamma_E^2\right).$$

Appare quindi una sorgente di scambio:

$$Q_\nu = T_{\mu\nu} \nabla^\mu \left(\ln \gamma_E^2\right),$$

che rappresenta un trasferimento di energia e quantità di moto tra il settore della materia e quello del campo planckiano associato a γ_E. La conservazione totale del sistema rimane comunque garantita, poiché la corrente Q_ν è interpretata come contributo del settore geometrico-energetico.

Consistenza matematica

La formulazione planckiana è matematicamente consistente in quanto:

- per $\gamma_E = \text{const.}$ si recupera la conservazione standard $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ e dunque la Relatività Generale;
- per $\gamma_E = \gamma_E(x)$ la violazione apparente della conservazione in $T_{\mu\nu}^{(eff)}$ è bilanciata dall'introduzione di Q_ν, garantendo la chiusura delle equazioni di campo;
- l'identità di Bianchi rimane valida, poiché è una proprietà geometrica indipendente dalle modifiche introdotte.

Osservazione conclusiva

La struttura differenziale delle equazioni di Einstein viene preservata integralmente. L'unica novità introdotta dalla RRP è la modulazione energetica del tensore materia, che agisce come peso dinamico e garantisce l'assenza di divergenze ultraviolette per $E \to E_p$, mantenendo intatta la consistenza matematica globale del sistema.

5.4 Tensore energia-impulso efficace

Un aspetto cruciale della Relatività Ristretta Planckiana (RRP) è la ridefinizione del tensore energia-impulso, che incorpora il fattore di attenuazione energetica γ_E. Questa modifica assicura che, al crescere dell'energia verso la scala di Planck E_p, l'effetto gravitazionale della materia non diverga, preservando la consistenza matematica e fisica della teoria.

Definizione

Si parte dal tensore energia-impulso standard della materia:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}},$$

dove S_m è l'azione della materia. Nella RRP si introduce una correzione universale legata al fattore planckiano:

$$T_{\mu\nu}^{(eff)} = \frac{1}{\gamma_E^2} T_{\mu\nu},$$

con

$$\gamma_E(E) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{E}{E_p}\right)^2}}, \qquad 0 \leq E < E_p.$$

Questo implica che l'effetto gravitazionale di una sorgente di energia-impulso è ridotto di un fattore $1/\gamma_E^2$.

Derivazione variazionale

L'azione totale comprende il termine gravitazionale e quello della materia "ponderata":

$$S = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g}\,(R - 2\Lambda) + \int d^4x \sqrt{-g}\, \frac{1}{\gamma_E^2} L_m.$$

Variando rispetto alla metrica $g^{\mu\nu}$, si ottiene:

$$T_{\mu\nu}^{(eff)} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m^{(eff)}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{\gamma_E^2} T_{\mu\nu},$$

dove $S_m^{(eff)}$ è l'azione di materia modificata.

Equazioni di campo

Le equazioni di Einstein assumono la forma:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(eff)} = \frac{8\pi G}{c^4 \gamma_E^2} T_{\mu\nu}.$$

Il contributo della materia è quindi modulato da γ_E, che dipende dallo stato energetico considerato. Nel limite $E \ll E_p$ si recupera la Relatività Generale ordinaria.

Proprietà di conservazione

Dall'identità di Bianchi segue:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(eff)} = 0.$$

Se $\gamma_E =$ const., la conservazione coincide con quella standard:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0.$$

Se invece $\gamma_E = \gamma_E(x)$ varia nello spaziotempo, si introduce un termine di scambio:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(eff)} = -T_{\mu\nu} \nabla^\mu \left(\ln \gamma_E^2 \right),$$

che descrive un trasferimento di energia-impulso con il settore planckiano, mantenendo comunque la conservazione totale del sistema.

Interpretazione fisica

Il tensore energia-impulso efficace rappresenta il "peso gravitazionale" della materia in presenza della scala di Planck. In particolare:

- per $E \ll E_p$, $T_{\mu\nu}^{(eff)} \approx T_{\mu\nu}$, e la dinamica coincide con la Relatività Generale;
- per $E \to E_p$, $T_{\mu\nu}^{(eff)} \to 0$, e la sorgente perde la capacità di generare curvatura infinita, evitando singolarità.

Esempi applicativi

1. **Cosmologia FLRW**: l'energia e la pressione efficaci sono:

$$\rho_{eff} = \frac{\rho}{\gamma_E^2}, \qquad p_{eff} = \frac{p}{\gamma_E^2},$$

portando alle equazioni di Friedmann modificate.

2. **Buchi neri**: la massa efficace risulta:

$$M_{eff} = \frac{M}{\gamma_E^2},$$

e l'orizzonte di Schwarzschild si riduce a:

$$r_s^{(eff)} = \frac{2GM_{eff}}{c^2}.$$

Consistenza matematica

La definizione di $T_{\mu\nu}^{(eff)}$ preserva:

- la simmetria e la forma tensoriale del tensore energia-impulso;
- la compatibilità con l'identità di Bianchi;
- la riduzione corretta alla Relatività Generale per basse energie.

Conclusione

Il tensore energia-impulso efficace costituisce la chiave dinamica della RRP: introduce una regolarizzazione naturale delle sorgenti gravitazionali senza rompere la struttura matematica della teoria, fornendo un meccanismo concreto per la risoluzione delle singolarità cosmiche e dei buchi neri.

6 Soluzioni fisiche

6.1 Recupero del limite GR per $E \ll E_p$

Un requisito fondamentale di qualsiasi estensione della Relatività Generale (RG) è il *principio di riduzione*, ossia la garanzia che nel limite di basse energie le nuove equazioni si riducano a quelle classiche di Einstein. Nel quadro della Relatività Ristretta Planckiana (RRP), questo principio si realizza attraverso il comportamento del fattore planckiano:

$$\gamma_E(E) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{E}{E_p}\right)^2}},$$

dove $E_p = \sqrt{\hbar c^5/G}$ è l'energia di Planck.

Espansione perturbativa per $E \ll E_p$. Per energie molto inferiori a E_p si ha $\epsilon = E/E_p \ll 1$, e l'espansione di γ_E fornisce:

$$\gamma_E(\epsilon) = 1 + \tfrac{1}{2}\epsilon^2 + \tfrac{3}{8}\epsilon^4 + \mathcal{O}(\epsilon^6).$$

Ne consegue che:

$$\frac{1}{\gamma_E^2} = 1 - \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4).$$

Questa relazione mostra che la correzione planckiana al tensore energia-impulso è trascurabile nel limite $\epsilon \to 0$, e il formalismo si riduce alla RG classica.

Equazioni di campo. Nella RRP le equazioni di Einstein modificate assumono la forma:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(eff)}, \qquad T_{\mu\nu}^{(eff)} = \frac{1}{\gamma_E^2} T_{\mu\nu}.$$

Per $E \ll E_p$, $\gamma_E \approx 1$, e si recuperano le equazioni classiche:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

Soluzioni cosmologiche. Nel caso della metrica FLRW, le equazioni di Friedmann modificate sono:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho}{\gamma_E^2} - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3},$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \frac{\rho + 3p/c^2}{\gamma_E^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}.$$

Per $\gamma_E \to 1$, queste si riducono esattamente alle equazioni cosmologiche standard di Einstein–Friedmann.

Soluzioni statiche sferiche. Per una distribuzione sferica di massa M, la massa efficace nella RRP è:

$$M_{eff} = \frac{M}{\gamma_E^2}.$$

Nel limite $E \ll E_p$, si ha $M_{eff} \approx M$, e la metrica Schwarzschild planckiana:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM_{eff}}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM_{eff}}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

si riduce alla metrica di Schwarzschild classica.

Consistenza matematica. Il recupero del limite GR garantisce che:

- la teoria RRP sia *localmente indistinguibile* dalla RG per energie sub-planckiane;
- siano rispettati i test classici della RG (precessione del perielio, deflessione della luce, onde gravitazionali);
- la RRP si ponga come estensione coerente e regolare, senza contraddire i risultati sperimentali consolidati.

Pertanto, il limite $E \ll E_p$ rappresenta una verifica cruciale di consistenza, assicurando che la Relatività Ristretta Planckiana si riduca al paradigma einsteiniano nel dominio già osservato.

6.2 Cosmologia planckiana: Big Bounce e scenari inflazionari modificati

Uno degli ambiti più significativi in cui la Relatività Ristretta Planckiana (RRP) produce effetti è la cosmologia primordiale. Le modifiche introdotte al tensore energia–impulso e alle equazioni di Friedmann conducono infatti a scenari in cui la singolarità iniziale del Big Bang viene sostituita da un *Big Bounce*, e i meccanismi inflazionari standard vengono riformulati in termini planckiani.

Equazioni di Friedmann modificate. A partire dalle equazioni di campo planckiane:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{(eff)}_{\mu\nu}, \qquad T^{(eff)}_{\mu\nu} = \frac{1}{\gamma_E^2} T_{\mu\nu},$$

si ricavano le equazioni di Friedmann per un universo FLRW:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho}{\gamma_E^2} - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3},$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \frac{\rho + 3p/c^2}{\gamma_E^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}.$$

Regime ad alta energia e rimozione della singolarità. Nel limite $E \to E_p$, il fattore planckiano diverge:

$$\gamma_E(E) = \frac{1}{\sqrt{1 - (E/E_p)^2}} \quad \longrightarrow \quad +\infty.$$

Di conseguenza, i termini con ρ e p nelle equazioni cosmologiche vengono attenuati:

$$\frac{\rho}{\gamma_E^2} \quad \to \quad \rho_{eff} \ll \rho.$$

Questo implica che, anche se ρ cresce verso densità planckiane, il contributo gravitazionale effettivo si satura. In particolare, l'equazione:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho}{\gamma_E^2} + \dots$$

non diverge mai, e ammette un minimo $a_{min} > 0$ per il fattore di scala. Questo corrisponde a un *rimbalzo cosmico* (Big Bounce), in cui la contrazione dell'universo viene arrestata e sostituita da una fase di espansione regolare.

Dinamica del Big Bounce. Per un fluido dominato da energia di radiazione ($p = \rho c^2/3$), si ottiene:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{3}\frac{\rho}{\gamma_E^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}.$$

Nel limite $\rho \to \rho_p \sim E_p^4/(\hbar c)^3$, il termine (ρ/γ_E^2) tende a un valore finito, impedendo la divergenza di $\ddot{a}/a$ e assicurando che $a(t)$ non si annulli mai. La soluzione cosmologica ammette dunque un rimbalzo regolare.

Scenari inflazionari modificati. Nel contesto inflazionario standard, l'espansione accelerata è guidata da un campo scalare ϕ con potenziale $V(\phi)$. Nella RRP, l'energia efficace del campo è:

$$\rho_{eff}(\phi) = \frac{1}{\gamma_E^2}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right).$$

L'equazione di Friedmann diventa:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{eff}(\phi).$$

Per $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ si ha inflazione, ma con un tasso di espansione ridotto rispetto al caso standard a causa del fattore $1/\gamma_E^2$. Questo comporta:

- un numero di e-folds dipendente dall'energia planckiana locale;

- una possibile riduzione della durata dell'inflazione;
- modifiche agli spettri delle perturbazioni primordiali, con deviazioni testabili.

Predizioni osservabili. Le principali conseguenze cosmologiche sono:

1. **Rimbalzo regolare:** assenza di singolarità iniziale, con $a_{min} > 0$;
2. **Inflazione attenuata:** lo scenario inflazionario persiste ma con dinamica modificata dal fattore planckiano;
3. **Spettri cosmologici:** deviazioni nei parametri spettrali n_s e r, legate a correzioni planckiane.

Conclusione. La cosmologia planckiana fornisce un'alternativa coerente al Big Bang singolare, introducendo un Big Bounce regolare e una fase inflazionaria modificata. Questo quadro apre la strada a predizioni testabili tramite osservazioni cosmologiche di precisione, come le anisotropie del fondo cosmico a microonde e lo spettro delle onde gravitazionali primordiali.

6.3 Buchi neri regolari e attenuazione delle singolarità

La Relatività Ristretta Planckiana (RRP) introduce una modifica fondamentale alle sorgenti gravitazionali attraverso il tensore energia–impulso efficace:

$$T_{\mu\nu}^{(eff)} = \frac{1}{\gamma_E^2} T_{\mu\nu}, \qquad \gamma_E(E) = \frac{1}{\sqrt{1 - (E/E_p)^2}},$$

che comporta un'attenuazione del contributo energetico nelle equazioni di campo di Einstein. Questo meccanismo ha implicazioni profonde sulla struttura interna dei buchi neri e sulla rimozione delle singolarità.

Massa efficace e soluzione di Schwarzschild planckiana. Consideriamo una sorgente sfericamente simmetrica con massa M. Nella RRP, la massa gravitante percepita dallo spaziotempo esterno è ridotta a:

$$M_{eff} = \frac{M}{\gamma_E^2}.$$

La metrica esterna assume la forma:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM_{eff}}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM_{eff}}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

Il raggio di Schwarzschild efficace è quindi:

$$r_s^{(eff)} = \frac{2GM_{eff}}{c^2} = \frac{1}{\gamma_E^2} \frac{2GM}{c^2}.$$

Comportamento planckiano. Nel limite $E \ll E_p$ si ha $\gamma_E \approx 1$ e $M_{eff} \approx M$: si recupera la soluzione classica di Schwarzschild. Nel regime opposto, quando $E \to E_p$, il fattore $\gamma_E \to \infty$, quindi:

$$M_{eff} \to 0, \qquad r_s^{(eff)} \to 0.$$

Questo implica che la formazione di un orizzonte si arresta per masse prossime alla scala di Planck, e la singolarità centrale viene eliminata in quanto il campo gravitazionale si attenua oltre la soglia planckiana.

Soluzioni regolari e confronto con modelli noti. L'effetto della RRP è concettualmente analogo a quello dei modelli di buchi neri regolari (Bardeen, Hayward, Dymnikova), in cui il tensore energia–impulso viene modificato da campi quantistici o semiclassici per eliminare la singolarità. Qui, tuttavia, la regolarità emerge da una legge universale di attenuazione:

$$T_{\mu\nu}^{(eff)} = \frac{T_{\mu\nu}}{\gamma_E^2},$$

che agisce in maniera covariante e indipendente dal tipo di materia sorgente. La divergenza dell'energia interna a $r \to 0$ viene soppressa dalla crescita illimitata di γ_E, che compensa l'aumento di densità.

Estensione a Kerr e rotazione. Per un buco nero rotante, la soluzione di Kerr con parametri (M, J) viene modificata sostituendo $M \to M_{eff}$. Il parametro di spin diventa:

$$a_{eff} = \frac{J}{M_{eff}c},$$

che cresce all'aumentare di γ_E, portando a un indebolimento della curvatura interna e a una dilatazione delle superfici caratteristiche (ergosfera, orizzonti interni ed esterni). Anche in questo caso, nel limite planckiano, l'orizzonte tende a dissolversi.

Attenuazione delle singolarità. Il tensore di Einstein:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(eff)},$$

non diverge mai in quanto $T_{\mu\nu}^{(eff)}$ è limitato dal fattore $1/\gamma_E^2$. Per densità $\rho \to \rho_p \sim E_p^4/(\hbar c)^3$, il termine effettivo $\rho_{eff} = \rho/\gamma_E^2$ rimane finito, impedendo che le invarianti scalari di curvatura (R, $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$) divergano al centro. In tal modo, la geometria risulta regolare e priva di singolarità.

Implicazioni fisiche. Le principali conseguenze della regolarizzazione planckiana dei buchi neri sono:

1. **Assenza di singolarità centrale:** la densità e la curvatura rimangono finite anche a $r \to 0$;
2. **Orizzonti modificati:** il raggio di Schwarzschild e le superfici caratteristiche sono ridotti da un fattore $1/\gamma_E^2$;
3. **Limite planckiano:** al raggiungimento di energie vicine a E_p, l'orizzonte collassa e il buco nero si dissolve in uno stato regolare;
4. **Stabilità teorica:** il meccanismo è intrinsecamente covariante e non richiede ipotesi ad hoc sulla materia sorgente.

Conclusione. La Relatività Ristretta Planckiana fornisce un quadro coerente per la costruzione di buchi neri regolari, in cui le singolarità vengono sostituite da configurazioni geometriche finite grazie al ruolo regolatore del fattore γ_E. Questa attenuazione universale delle sorgenti rappresenta una predizione distintiva della teoria e apre la strada a scenari di gravità regolare verificabili tramite osservazioni astrofisiche ad alta energia.

6.4 Onde gravitazionali ad alta energia

Uno degli ambiti più promettenti per testare sperimentalmente la Relatività Ristretta Planckiana (RRP) riguarda la propagazione delle onde gravitazionali in regimi energetici prossimi alla scala di Planck. In questo contesto, la correzione planckiana agisce attraverso il tensore energia–impulso efficace:

$$T_{\mu\nu}^{(eff)} = \frac{1}{\gamma_E^2} T_{\mu\nu}, \qquad \gamma_E(E) = \frac{1}{\sqrt{1-(E/E_p)^2}},$$

che modifica la sorgente nelle equazioni di Einstein lineari.

Gravità linearizzata. Consideriamo la decomposizione perturbativa della metrica:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1,$$

dove $\eta_{\mu\nu}$ è la metrica di Minkowski. Introducendo la traccia inversa:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h, \qquad h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu},$$

e imponendo la gauge di Lorenz:

$$\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0,$$

le equazioni di campo modificate assumono la forma:

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(eff)} = -\frac{16\pi G}{c^4 \gamma_E^2} T_{\mu\nu}.$$

Propagazione nel vuoto. In assenza di sorgenti ($T_{\mu\nu} = 0$), l'equazione resta:

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = 0,$$

con soluzioni piane del tipo:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = \Re\left\{A_{\mu\nu} e^{i(k_\alpha x^\alpha)}\right\},$$

dove $k^\alpha k_\alpha = 0$ e $A_{\mu\nu}$ soddisfa le condizioni di gauge. Pertanto, le onde gravitazionali continuano a propagarsi alla velocità della luce c, senza violazioni della causalità.

Effetto planckiano sulle sorgenti. La differenza sostanziale risiede nella riduzione dell'ampiezza prodotta dalle sorgenti ultra-energetiche. In un evento astrofisico caratterizzato da energia E, il tensore energia–impulso effettivo risulta ridotto da un fattore $1/\gamma_E^2$. L'ampiezza osservata per un'onda gravitazionale è quindi:

$$h_{obs} \propto \frac{1}{\gamma_E^2} h_{GR},$$

dove h_{GR} è l'ampiezza prevista dalla Relatività Generale. Nel limite $E \ll E_p$ si recupera $h_{obs} \approx h_{GR}$, mentre per $E \to E_p$ l'emissione gravitazionale viene soppressa.

Frequenza massima osservabile. Il legame tra energia caratteristica della sorgente e frequenza dell'onda prodotta implica che esiste una frequenza limite:

$$f_{obs}(E) = \frac{f_{max}}{\gamma_E(E)},$$

dove f_{max} rappresenta la massima frequenza associata alla dinamica classica della sorgente. Per energie prossime a E_p, $\gamma_E \to \infty$ e $f_{obs} \to 0$, indicando che oscillazioni ad altissima frequenza vengono "congelate" dal meccanismo planckiano.

Polarizzazioni e struttura del gruppo. La struttura di gruppo rimane isomorfa a $SO(1,3)$: le due polarizzazioni fondamentali ($+$, $\times$) delle onde gravitazionali non vengono alterate. Tuttavia, la rotazione di Wigner associata alla composizione di boost energetici suggerisce che sorgenti non collineari ad alta energia possano generare effetti di mixing tra polarizzazioni, misurabili come rotazioni anomale del piano di polarizzazione.

Predizioni sperimentali. Le principali conseguenze osservabili della RRP sulle onde gravitazionali sono:

1. **Soppressione delle ampiezze** per eventi di energia ultra-alta ($E \sim 10^{19}$ GeV);
2. **Limite superiore alle frequenze osservabili**, con cut-off dinamico regolato da E/E_p;
3. **Possibili rotazioni di polarizzazione** in eventi multi-sorgente non collineari, derivanti da effetti di Wigner planckiani.

Osservazioni future. Gli interferometri gravitazionali di prossima generazione (LISA, Cosmic Explorer, Einstein Telescope) e le osservazioni indirette tramite segnali cosmologici (CMB B-modes, background stocastico) forniranno test cruciali per verificare l'attenuazione planckiana prevista dalla teoria. In particolare, la mancata osservazione di onde gravitazionali sopra una certa soglia energetica costituirebbe un chiaro indizio a favore della Relatività Ristretta Planckiana.

7 Verificabilità e testabilità

7.1 Consistenza teorica

La Relatività Ristretta Planckiana (RRP) introduce una modifica strutturale alle trasformazioni di Lorentz sostituendo il rapporto velocistico $\frac{v}{c}$ con il rapporto energetico $\frac{E}{E_p}$, dove E_p è l'energia di Planck. La consistenza teorica della formulazione deve essere verificata su più livelli: chiusura matematica, recupero dei limiti noti, compatibilità con i principi di causalità e invarianza, assenza di paradossi cinematici e stabilità delle equazioni di campo.

Invarianza dell'intervallo planckiano.

La RRP si fonda sulla definizione di un intervallo invariante:

$$s_E^2 = (c_E t)^2 - |\vec{x}|^2,$$

il quale deve rimanere costante sotto trasformazioni di boost energetico $B_E(\beta_E)$ con parametro $\beta_E = E/E_p$. La verifica esplicita segue dalle proprietà delle matrici di boost:

$$B_E^T \, \eta \, B_E = \eta,$$

dove $\eta = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ è la metrica di Minkowski. Ne consegue che lo spazio-tempo planckiano mantiene lo stesso gruppo di isometrie $SO(1, 3)$ della Relatività Ristretta classica, con la sola differenza che la parametrizzazione avviene in termini energetici anziché velocistici.

Chiusura del gruppo e rapidità energetica.

Definendo la rapidità energetica ϕ_E come

$$\tanh \phi_E = \beta_E,$$

si ottiene che le trasformazioni planckiane si compongono linearmente:

$$B_E(\phi_2) \, B_E(\phi_1) = B_E(\phi_1 + \phi_2).$$

Questo dimostra la chiusura del gruppo e l'associatività delle trasformazioni, garantendo che la struttura algebrica è identica a quella della Relatività Ristretta, con sostituzione $\frac{v}{c} \to \frac{E}{E_p}$.

Compatibilità con le identità di Bianchi.

Nel regime dinamico, le equazioni di campo modificate assumono la forma:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \, T_{\mu\nu}^{(\mathrm{eff})}, \qquad T_{\mu\nu}^{(\mathrm{eff})} = \frac{1}{\gamma_E^2} \, T_{\mu\nu},$$

dove $\gamma_E = \left(1 - \beta_E^2\right)^{-1/2}$. La contrazione delle identità di Bianchi implica:

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0,$$

da cui segue la conservazione effettiva:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(\mathrm{eff})} = 0.$$

Pertanto, la struttura variazionale della teoria è coerente e non genera violazioni della conservazione del 4-impulso.

Recupero dei limiti noti.
Il limite di bassa energia ($E \ll E_p$) produce:

$$\gamma_E \simeq 1 \quad \Rightarrow \quad T_{\mu\nu}^{(\mathrm{eff})} \simeq T_{\mu\nu},$$

per cui la teoria si riduce esattamente alla Relatività Generale classica. Analogamente, nel settore cinematico:

$$\beta_E \to 0 \quad \Rightarrow \quad B_E \to I,$$

recuperando la cinematica newtoniana. Questo garantisce la compatibilità con i limiti osservativi già testati.

Causalità e assenza di paradossi.
La condizione $|\beta_E| < 1$ assicura che $E < E_p$, in perfetta analogia con $|v| < c$ nella Relatività Ristretta. Questo vincolo impedisce il superamento dell'energia di Planck e previene la comparsa di intervalli temporali chiusi o di paradossi di tipo tachionico. L'invarianza dell'intervallo planckiano preserva quindi la causalità in tutte le trasformazioni.

Conclusione.
La RRP è internamente consistente: la sua formulazione conserva l'invarianza di gruppo, rispetta la conservazione del tensore energia–impulso attraverso le identità di Bianchi, recupera i limiti classici già verificati sperimentalmente e non introduce violazioni di causalità. Questa solidità matematica ne giustifica lo studio come estensione simmetrica della Relatività Ristretta di Einstein verso il regime planckiano.

7.1.1 Limite newtoniano e post-newtoniano (test PPN)

Un criterio essenziale per la consistenza della Relatività Ristretta Planckiana (RRP) è la capacità di recuperare, nei limiti appropriati, sia la dinamica newtoniana che le correzioni post–newtoniane, le quali sono state confermate con estrema precisione in diversi test sperimentali. In questa sezione sviluppiamo in modo sistematico il limite a bassa energia e bassa velocità, e analizziamo le correzioni previste in termini di parametri post–newtoniani (PPN).

Energia e massa efficace.
L'energia totale di una particella in RRP si scrive come

$$H = m_{\text{eff}}\,\gamma_v c^2, \qquad m_{\text{eff}} = m\,\gamma_E,$$

dove $\gamma_v = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ è il fattore di Lorentz standard e $\gamma_E = (1 - (E/E_{\text{p}})^2)^{-1/2}$ è il fattore planckiano. La combinazione produce una massa efficace:

$$m_{\text{eff}} = m \left(1 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{E}{E_{\text{p}}}\right)^2 + \tfrac{3}{8}\left(\tfrac{E}{E_{\text{p}}}\right)^4 + \cdots\right),$$

che riduce a m per $E \ll E_{\text{p}}$.

Espansione newtoniana.
Per basse velocità ($v \ll c$) e basse energie ($E \ll E_{\text{p}}$), l'energia si espande come

$$H \simeq m_{\text{eff}} c^2 + \frac{|\vec{p}|^2}{2m_{\text{eff}}} - \frac{|\vec{p}|^4}{8m_{\text{eff}}^3 c^2} + \mathcal{O}(v^6/c^6).$$

Il primo termine $m_{\text{eff}} c^2$ corrisponde all'energia di riposo modificata, il secondo all'energia cinetica newtoniana con massa efficace, mentre i termini successivi forniscono correzioni relativistiche e post–newtoniane.

Limite newtoniano nelle equazioni di campo.
Le equazioni di campo modificate assumono la forma

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(\text{eff})}, \qquad T_{\mu\nu}^{(\text{eff})} = \frac{1}{\gamma_E^2} T_{\mu\nu}.$$

Nell'approssimazione debole, con potenziale gravitazionale $\Phi \ll c^2$, il campo gravitazionale obbedisce a

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\,\rho_{\rm eff}, \qquad \rho_{\rm eff} = \frac{\rho}{\gamma_E^2}.$$

Poiché $\gamma_E \simeq 1$ per $E \ll E_{\rm p}$, si recupera esattamente l'equazione di Poisson della gravitazione newtoniana.

Sviluppo post–newtoniano.

Il formalismo PPN (Parametrized Post–Newtonian) consente di confrontare la teoria con gli esperimenti solari e astrofisici. Espandendo la metrica attorno a Minkowski,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1,$$

la RRP produce modifiche nel termine sorgente attraverso $\rho_{\rm eff}$ e $p_{\rm eff}$. In particolare, la metrica statica sferica si scrive

$$ds^2 = \left(1 + 2\frac{\Phi}{c^2} + 2\beta\frac{\Phi^2}{c^4} + \cdots\right)c^2dt^2 - \left(1 - 2\gamma\frac{\Phi}{c^2} + \cdots\right)d\vec{x}^2,$$

dove i parametri PPN γ e β sono modificati dalla dipendenza da γ_E. Esplicitamente:

$$\gamma - 1 \simeq -\frac{2\alpha_0^2}{1+\alpha_0^2}, \qquad \beta - 1 \simeq \tfrac{1}{2}\alpha_0^2\beta_0,$$

con

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\frac{f'(\epsilon_0)}{f(\epsilon_0)}, \qquad f(\epsilon) = \frac{1}{\gamma_E(\epsilon)^2}, \qquad \epsilon = \frac{E}{E_{\rm p}}.$$

Compatibilità con i test sperimentali.

I vincoli osservativi più stringenti provengono da:

- deflessione della luce e ritardo di Shapiro (vincoli su $\gamma - 1 < 10^{-5}$);
- precessione del perielio di Mercurio (vincoli su $\beta - 1 < 10^{-4}$);

- esperimenti di Lunar Laser Ranging e missioni satellitari come Cassini.

Affinché la RRP sia compatibile con questi dati, è necessario che $\epsilon = E/E_{\mathrm{p}} \ll 1$ in tutti i processi astrofisici osservabili, condizione che risulta ampiamente soddisfatta. Di conseguenza, la teoria recupera i valori PPN standard con correzioni trascurabili nei regimi attualmente accessibili.

Conclusione.
La RRP risulta verificabile attraverso i test post–newtoniani: essa recupera la meccanica newtoniana nel limite di bassa energia e riproduce con grande precisione i parametri PPN osservati. Le correzioni emergono solo per energie comparabili con E_{p}, regime ancora non accessibile sperimentalmente ma potenzialmente rilevante per cosmologia primordiale e astrofisica ad altissime energie.

7.1.2 Stabilità dinamica e perturbazioni lineari

Un criterio fondamentale per la consistenza della Relatività Ristretta Planckiana (RRP) è la stabilità delle soluzioni dinamiche e la propagazione delle perturbazioni lineari. In questa sezione analizziamo le condizioni necessarie per garantire che la teoria non presenti instabilità di tipo ghost o tachionico, e sviluppiamo le equazioni di perturbazione attorno a soluzioni di background di interesse fisico (spaziotempo piatto e cosmologia FLRW).

Equazioni di campo e campo planckiano.
Nella formulazione variazionale estesa, l'azione totale comprende un campo scalare $\epsilon(x)$ che regola il fattore planckiano:

$$\gamma_E(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}}, \qquad f(\epsilon) = \frac{1}{\gamma_E^2} = 1-\epsilon^2, \qquad 0 \le \epsilon < 1.$$

L'azione del campo planckiano è data da:

$$S_\epsilon = \int d^4x \sqrt{-g}\left[-\frac{\kappa}{2} g^{\mu\nu}(\nabla_\mu \epsilon)(\nabla_\nu \epsilon) - U(\epsilon)\right],$$

dove $\kappa > 0$ garantisce una cinetica ben definita e $U(\epsilon)$ è un potenziale regolare con $U''(\epsilon_0) \ge 0$.

Le equazioni di Einstein modificate diventano:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left[T^{(\epsilon)}_{\mu\nu} + f(\epsilon) T^{(m)}_{\mu\nu} \right],$$

con

$$T^{(\epsilon)}_{\mu\nu} = \kappa \nabla_\mu \epsilon \nabla_\nu \epsilon - g_{\mu\nu} \left(\frac{\kappa}{2} (\nabla\epsilon)^2 + U(\epsilon) \right).$$

Perturbazioni attorno a Minkowski.

Consideriamo il background piatto $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ e $\epsilon = \epsilon_0 = \text{cost.}$ Le perturbazioni metriche si scrivono come

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1,$$

mentre il campo planckiano è perturbato come

$$\epsilon(x) = \epsilon_0 + \delta\epsilon(x), \qquad |\delta\epsilon| \ll 1.$$

L'azione quadraticamente espansa per $\delta\epsilon$ è:

$$S^{(2)}_\epsilon = \int d^4x \left[-\frac{\kappa}{2}\, \partial_\mu(\delta\epsilon)\, \partial^\mu(\delta\epsilon) - \frac{1}{2} m_\epsilon^2 (\delta\epsilon)^2 \right],$$

dove

$$m_\epsilon^2 = U''(\epsilon_0).$$

L'equazione delle perturbazioni scalari risulta

$$\Box\, \delta\epsilon + m_\epsilon^2\, \delta\epsilon = 0,$$

ovvero un'equazione di Klein–Gordon libera, ben posta se $\kappa > 0$ e $m_\epsilon^2 \geq 0$.

Condizioni di stabilità.

La stabilità lineare richiede:

1. Nessun *ghost*: $\kappa > 0$ assicura segno corretto della parte cinetica.

2. Nessun *tachione*: $m_\epsilon^2 = U''(\epsilon_0) \geq 0$.
3. Velocità delle onde scalari: $c_s^2 = 1$, garantita da cinetica canonica.
4. Iperbolicità delle equazioni: l'operatore d'Alembertiano $\Box$ mantiene la causalità delle soluzioni.

Perturbazioni cosmologiche.
In uno sfondo FLRW con metrica

$$ds^2 = (1 + 2\Phi)c^2dt^2 - a(t)^2(1 - 2\Psi)d\vec{x}^2,$$

le perturbazioni di ϵ introducono nuove sorgenti gravitazionali. L'equazione per $\delta\epsilon$ in spazio di Fourier è

$$\ddot{\delta\epsilon} + 3H\dot{\delta\epsilon} + \left(\frac{c^2k^2}{a^2} + m_\epsilon^2\right)\delta\epsilon = S_\epsilon,$$

dove il termine sorgente è

$$S_\epsilon \sim f'(\epsilon_0)\,\delta L_m + \text{accoppiamenti metrici.}$$

Lo *slip gravitazionale* $\Phi - \Psi$ resta nullo a primo ordine per cinetica canonica, e la relazione di Poisson modificata diventa

$$k^2\Psi \simeq 4\pi G a^2\left[f(\epsilon_0)\,\delta\rho + f'(\epsilon_0)\rho\,\delta\epsilon + \delta\rho_\epsilon\right].$$

Consistenza matematica.
L'analisi mostra che le perturbazioni lineari in RRP rimangono ben poste e causalmente consistenti, purché il campo ϵ soddisfi le condizioni di stabilità sopra elencate. In questo quadro:

- Le fluttuazioni di ϵ si propagano come onde scalari massive.
- Le metriche perturbate rispettano la struttura iperbolica delle equazioni di Einstein modificate.
- La conservazione del 4–momento totale, $\nabla^\mu(T^{(\epsilon)}_{\mu\nu} + fT^{(m)}_{\mu\nu}) = 0$, è assicurata dall'identità di Bianchi.

Conclusione.

La RRP risulta stabile a livello dinamico e lineare: non emergono instabilità patologiche, né rotture della causalità. Le perturbazioni cosmologiche introducono correzioni osservabili solo su scale energetiche prossime a E_{p}, mantenendo la compatibilità con i dati attuali e offrendo predizioni specifiche per scenari di cosmologia primordiale.

7.1.3 Invarianza di gruppo e assenza di paradossi cinetici

Un aspetto cruciale per la consistenza della Relatività Ristretta Planckiana (RRP) è la verifica che le trasformazioni di simmetria preservino la struttura del gruppo di Lorentz modificato e che non emergano paradossi cinetici. In questa sezione dimostriamo l'invarianza dell'intervallo planckiano sotto le trasformazioni di boost energetici e analizziamo la chiusura algebrica, la composizione e l'assenza di contraddizioni fisiche analoghe ai paradossi dei sistemi superluminali.

Invariante planckiano.

L'intervallo planckiano è definito da

$$s_E^2 = (c_E t)^2 - |\vec{x}|^2.$$

Sotto un boost energetico lungo l'asse x,

$$\begin{aligned} x' &= \gamma_E \left(x - \beta_E c_E t \right), \\ t' &= \gamma_E \left(t - \frac{\beta_E}{c_E} x \right), \end{aligned}$$

dove $\beta_E = E/E_p$, con condizione $|\beta_E| < 1$, e

$$\gamma_E = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_E^2}}.$$

La verifica diretta mostra che

$$(c_E t')^2 - (x')^2 = (c_E t)^2 - x^2 = s_E^2,$$

garantendo l'invarianza dell'intervallo planckiano.

Struttura di gruppo e rapidità energetica.
Introduciamo la rapidità energetica ϕ_E definita da

$$\tanh(\phi_E) = \beta_E, \qquad \cosh(\phi_E) = \gamma_E, \qquad \sinh(\phi_E) = \gamma_E \beta_E.$$

In questi termini, un boost planckiano si scrive come

$$B(\phi_E) = \left(rr \begin{matrix} \cosh\phi_E & -\sinh\phi_E \\ -\sinh\phi_E & \cosh\phi_E \end{matrix} \right),$$

che preserva la metrica $\eta = \mathrm{diag}(1, -1)$.

La legge di composizione dei boost diventa additiva in ϕ_E:

$$B(\phi_{E,2}) B(\phi_{E,1}) = B(\phi_{E,1} + \phi_{E,2}),$$

con chiusura e associatività garantite.

Composizione in più dimensioni e rotazione di Wigner.
Nel caso tridimensionale, la composizione di due boost planckiani non collineari genera una rotazione di Wigner R_W, esattamente come nella Relatività Ristretta classica. Si ha quindi

$$B_E(\hat{n}_2, \phi_{E,2})\, B_E(\hat{n}_1, \phi_{E,1}) = R_W(\Omega, \hat{k})\, B_E(\hat{n}_{12}, \phi_{E,12}),$$

dove l'asse $\hat{k}$ è parallelo a $\hat{n}_2 \times \hat{n}_1$, e l'angolo Ω è calcolato tramite le funzioni iperboliche delle rapidità energetiche. Ciò conferma che la struttura del gruppo è isomorfa a $SO^+(1,3)$.

Algebra di Lie.
I generatori dei boost energetici K_i e delle rotazioni J_i soddisfano le relazioni di commutazione:

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k, \quad [J_i, K_j] = \epsilon_{ijk} K_k, \quad [K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk} J_k,$$

le stesse della Relatività Ristretta, mostrando che l'algebra resta $\mathfrak{so}(1,3)$. La sola modifica è nell'interpretazione del parametro di boost, sostituendo v/c con E/E_p.

Assenza di paradossi cinetici.

Nella Relatività Ristretta classica, i paradossi cinetici (ad esempio il paradosso dei gemelli in formulazioni improprie o la propagazione superluminale) derivano dal tentativo di superare il limite $v \geq c$. Nella RRP, la condizione $|\beta_E| < 1$ implica

$$E < E_p,$$

impedendo la possibilità di superare l'energia di Planck e quindi eliminando qualsiasi ambiguità interpretativa.

Le proprietà seguenti garantiscono la coerenza:

- **Chiusura**: la composizione di due trasformazioni è ancora una trasformazione valida del gruppo di Lorentz planckiano.
- **Inverso**: per ogni boost $B(\beta_E)$ esiste $B(-\beta_E)$.
- **Assenza di super-energia**: non esistono trasformazioni che portino E oltre E_p.
- **Simmetria speculare**: la struttura matematica resta identica a quella della Relatività Ristretta, con la sostituzione $v/c \mapsto E/E_p$.

Conclusione.

L'analisi mostra che la RRP conserva l'invarianza di gruppo e l'algebra di Lorentz, garantendo che non emergano paradossi cinetici. Questo rafforza la consistenza della teoria, assicurando che le trasformazioni planckiane costituiscano un gruppo ben definito, stabile e compatibile con le simmetrie fondamentali della fisica.

8 Predizioni sperimentali

8.1 Collisioni ultra-energetiche (acceleratori, raggi cosmici)

Impostiamo $c_E = c$ e definiamo il parametro adimensionale $\varepsilon \equiv E_{\text{state}}/E_{\text{p}}$, con $0 \leq \varepsilon < 1$. Il fattore planckiano è

$$\gamma_E(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \qquad m_{\text{eff}} \equiv m\,\gamma_E.$$

La relazione di dispersione a livello di particella libera diventa

$$E^2 = (pc)^2 + \big(m_{\text{eff}} c^2\big)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{E^2}{c^2} - p^2 = (m_{\text{eff}} c)^2.$$

Per $\varepsilon \ll 1$ si ha l'espansione

$$\gamma_E = 1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 + \tfrac{3}{8}\varepsilon^4 + \mathcal{O}(\varepsilon^6), \qquad m_{\text{eff}} = m\Big(1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 + \cdots\Big).$$

Osservabile 1 — Vite medie di stati instabili (test da decadimenti relativistici in collider). La legge di decadimento si scrive in termini del tempo proprio fisico; usando $d\tau_{\text{phys}} = \gamma_E\, d\tau_{\text{geo}} = \gamma_E\, dt/\gamma_v$ si ottiene per la vita media osservata:

$$\tau_{\text{lab}}^{\text{RRP}} = \frac{\gamma_v}{\gamma_E}\,\tau_0 = \tau_{\text{lab}}^{\text{SR}}\Big(1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4)\Big),$$

dove $\gamma_v = 1/\sqrt{1-\beta_v^2}$ è il fattore cinetico ordinario e τ_0 la vita media nel riposo proprio. La RRP predice quindi una riduzione frazionaria $\simeq \frac{1}{2}\varepsilon^2$ rispetto alla dilatazione di tempo prevista dalla Relatività Ristretta. Stime d'ordine di grandezza: a LHC ($E_{\text{beam}} \sim 7$ TeV per protone) $\varepsilon_{\text{LHC}} \sim 7 \times 10^{12}$ eV$/(1.22 \times 10^{28}$ eV$) \approx 6 \times 10^{-16}$, dunque $\frac{1}{2}\varepsilon^2 \sim 2 \times 10^{-31}$; per raggi cosmici ultra-energetici $E \sim 10^{20}$ eV, $\varepsilon \sim 8 \times 10^{-9}$ e $\frac{1}{2}\varepsilon^2 \sim 3 \times 10^{-17}$.

Osservabile 2 — Energie di soglia per produzione di stati massivi. Per un processo $a + b \to X$ con b a riposo in laboratorio, lo scalare di Mandelstam soddisfa $s = m_a^2 c^4 + m_b^2 c^4 + 2 m_b c^2 E_a$. In RRP, le masse a soglia sono rimpiazzate da $m_{i,\text{eff}} = m_i \gamma_E(\varepsilon_i)$ per gli stati finali prodotti. La soglia diventa

$$s_{\text{th}}^{\text{RRP}} = \Big(\sum_{i \in X} m_{i,\text{eff}} c^2\Big)^2, \qquad E_{a,\text{th}}^{\text{RRP}} = \frac{s_{\text{th}}^{\text{RRP}} - m_a^2 c^4 - m_b^2 c^4}{2 m_b c^2}.$$

Per $\varepsilon_i \ll 1$,

$$s_{\text{th}}^{\text{RRP}} \simeq \Big(\sum_i m_i c^2\Big)^2 \left[1 + \sum_i \frac{m_i}{\sum_j m_j}\,\varepsilon_i^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4)\right],$$

quindi lo shift frazionario di soglia è dell'ordine $\sum_i \frac{m_i}{\sum_j m_j} \frac{1}{2}\varepsilon_i^2$. A energie di collider e persino per UHECR tale correzione è estremamente piccola.

Osservabile 3 — Bilancio di energia-impulso a livello di partone. Nel quadro fattorializzato, gli invarianti partonici $\hat{s}, \hat{t}, \hat{u}$ restano determinati dalle frazioni $x_{1,2}$ e da s, ma le masse efficaci nei canali di produzione $2 \to 2$ o $2 \to n$ sono m_{eff}. Ad esempio, per $q\bar{q} \to \ell^+\ell^-$ vicino alla soglia di una risonanza di massa M:

$$\hat{s}_{\text{th}}^{\text{RRP}} \simeq M_{\text{eff}}^2 c^4 = M^2 c^4 \, \gamma_E(\varepsilon_M)^2,$$

con una traslazione della posizione e dell'ampiezza del picco proporzionale a ε_M^2. In pratica, per $\varepsilon_M \ll 1$ lo spettro in massa invariante risulta indistinguibile dal caso standard entro l'attuale risoluzione sperimentale, ma fornisce un "null test" ad altissima precisione.

Osservabile 4 — Invarianza dell'angolo di Wigner nelle catene di boost del sistema evento. La composizione di due boost non collineari introduce la rotazione di Wigner con

$$\tan\frac{\Omega}{2}\,\hat{\boldsymbol{k}} = \frac{\sinh(\frac{\phi_1}{2})\sinh(\frac{\phi_2}{2})\,(\hat{\boldsymbol{n}}_2 \times \hat{\boldsymbol{n}}_1)}{\cosh(\frac{\phi_1}{2})\cosh(\frac{\phi_2}{2}) + (\hat{\boldsymbol{n}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_2)\sinh(\frac{\phi_1}{2})\sinh(\frac{\phi_2}{2})},$$

dove $\tanh\phi_i = \beta_{E,i}$ e $\beta_{E,i} = E_i/E_{\text{p}}$. In RRP la struttura angolare resta identica alla Relatività Ristretta (dipende solo da ϕ_i), ma l'identificazione $\phi_i = \operatorname{artanh}(E_i/E_{\text{p}})$ permette test consistenziali confrontando catene cinematiche ricostruite a diverse energie.

Programma di misura (indicativo).

1. In acceleratore: fit multilivello delle vite medie di stati B, D, τ ed iperoni a energie differenti, cercando una dipendenza $\propto -\frac{1}{2}\varepsilon^2$.

2. Near-threshold scans: scansione fine di soglia per canali $t\bar{t}$, W^+W^-, ZH per vincolare eventuali traslazioni $\propto \varepsilon^2$ in s_{th}.

3. In raggi cosmici: estrazione di limiti su ε da distribuzioni di profondità di massimo $X_{\max}$ e frazioni di muoni nelle docce, tramite confronti a modello in cui le masse efficaci m_{eff} entrano nei vincoli cinematici dei processi adronici primari.

Ordini di grandezza.

$$\varepsilon_{\text{LHC}} \sim 10^{-15}, \qquad \varepsilon_{\text{UHECR}}(10^{20}\,\text{eV}) \sim 8 \times 10^{-9}.$$

Le correzioni principali scalano come $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$; la RRP risulta quindi compatibile con tutti i dati attuali, e richiede misure di precisione o energie astrofisiche estreme per essere sondabile in laboratorio.

8.2 Modifiche al redshift cosmologico

Definizione operativa del redshift (RRP). Nella RRP la frequenza misurata da un osservatore è la derivata di fase rispetto al tempo proprio fisico del suo "clock planckiano", con $d\tau_{\text{phys}} = \gamma_E(\epsilon)\,d\tau_{\text{geo}}$, $\gamma_E(\epsilon) = 1/\sqrt{1-\epsilon^2}$, $\epsilon \equiv E_{\text{state}}/E_{\text{p}}$. Dato il 4-momento del fotone k^μ e la 4-velocità geometrica dell'osservatore $u^\mu = dx^\mu/d\tau_{\text{geo}}$, la frequenza fisica misurata è

$$\nu_{\text{phys}} = \frac{1}{2\pi}\frac{d\phi}{d\tau_{\text{phys}}} = \frac{1}{2\pi}\frac{d\phi}{d\tau_{\text{geo}}}\frac{d\tau_{\text{geo}}}{d\tau_{\text{phys}}} = \frac{-(k_\mu u^\mu)}{2\pi}\frac{1}{\gamma_E(\epsilon)}.$$

Ne segue che il redshift tra emissione (e) e osservazione (o) è

$$1 + z_{\text{RRP}} = \frac{\nu_{\text{phys,e}}}{\nu_{\text{phys,o}}} = \frac{(k_\mu u^\mu)_e}{(k_\mu u^\mu)_o}\frac{\gamma_E(\epsilon_o)}{\gamma_E(\epsilon_e)}.$$

Caso FRW (comoventi). Per un universo omogeneo e isotropo, con emettitore e osservatore comoventi, vale $\frac{(k_\mu u^\mu)_e}{(k_\mu u^\mu)_o} = \frac{a_0}{a_e}$. Allora

$$1 + z_{\text{RRP}} = \frac{a_0}{a_e}\frac{\gamma_E(\epsilon_o)}{\gamma_E(\epsilon_e)}.$$

Se l'osservatore ha energia di stato trascurabile $\epsilon_o \simeq 0$ (laboratorio), risulta

$$1 + z_{\text{RRP}} \simeq \frac{a_0}{a_e}\frac{1}{\gamma_E(\epsilon_e)}.$$

Espansione per $\epsilon \ll 1$. Poiché $\gamma_E(\epsilon) = 1 + \frac{1}{2}\epsilon^2 + \frac{3}{8}\epsilon^4 + \mathcal{O}(\epsilon^6)$, otteniamo

$$1+z_{\mathrm{RRP}} = (1+z_{\mathrm{FRW}})\,\frac{\gamma_E(\epsilon_o)}{\gamma_E(\epsilon_e)} \simeq (1+z_{\mathrm{FRW}})\left[1 + \tfrac{1}{2}(\epsilon_o^2 - \epsilon_e^2) + \mathcal{O}(\epsilon^4)\right].$$

Con $\epsilon_o \simeq 0$ segue la correzione leading

$$\Delta z \equiv z_{\mathrm{RRP}} - z_{\mathrm{FRW}} \simeq -\frac{1}{2}\,\epsilon_e^2\,(1 + z_{\mathrm{FRW}}) + \mathcal{O}(\epsilon^4),$$

ovvero una lieve riduzione del redshift apparente quando la sorgente ha ϵ_e non trascurabile.

Redshift gravitazionale statico (generico). In uno spazio-tempo statico con metrica $ds^2 = g_{00}c^2dt^2 - \ldots$, il redshift totale tra due radiatori statici è

$$1 + z_{\mathrm{RRP}} = \sqrt{\frac{g_{00}(o)}{g_{00}(e)}}\,\frac{\gamma_E(\epsilon_o)}{\gamma_E(\epsilon_e)}.$$

Il fattore geometrico riproduce il redshift gravitazionale standard, mentre il rapporto $\gamma_E(\epsilon_o)/\gamma_E(\epsilon_e)$ implementa la correzione di clock planckiano.

Drift del redshift. Indichiamo con t_o il tempo proprio fisico dell'osservatore locale. La derivata temporale del log-redshift è

$$\frac{d}{dt_o}\ln\!\big(1 + z_{\mathrm{RRP}}\big) = \frac{d}{dt_o}\ln\!\big(1 + z_{\mathrm{FRW}}\big) + \frac{d}{dt_o}\ln\gamma_E(\epsilon_o) - \frac{d}{dt_o}\ln\gamma_E(\epsilon_e).$$

Per $\epsilon_o =$ costante e $\epsilon_e = \epsilon_e(z)$, usando $\frac{d}{dt_o} = -H_0(1+z)\frac{d}{dz}$ si ottiene

$$\dot{z}_{\mathrm{RRP}} = \dot{z}_{\mathrm{FRW}} - (1+z_{\mathrm{FRW}})\,\frac{d\ln\gamma_E(\epsilon_e)}{dz}\,\dot{z}_{\mathrm{FRW}}, \quad \dot{z}_{\mathrm{FRW}} = (1+z)H_0 - H(z).$$

Per $\epsilon_e \ll 1$,

$$\frac{d\ln\gamma_E}{dz} \simeq \epsilon_e\,\frac{d\epsilon_e}{dz} + \mathcal{O}(\epsilon_e^3),$$

così la correzione è di ordine $\epsilon_e\,d\epsilon_e/dz$ e diventa potenzialmente osservabile solo se la sorgente traccia un regime energetico vicino alla scala di Planck.

Sintesi. La modifica RRP al redshift è un fattore moltiplicativo semplice

$$1 + z_{\mathrm{RRP}} = (1 + z_{\mathrm{geo}})\,\frac{\gamma_E(\epsilon_o)}{\gamma_E(\epsilon_e)},$$

dove $1 + z_{\mathrm{geo}} = \frac{(k_\mu u^\mu)_e}{(k_\mu u^\mu)_o}$ cattura gli effetti geometrici (espansione cosmica e/o potenziali gravitazionali) e il rapporto di γ_E implementa la diversa "velocità" dei clock planckiani di emettitore e osservatore. Nel limite $\epsilon_o, \epsilon_e \to 0$ si recupera esattamente la formula standard.

8.3 Segnali gravitazionali da collassi stellari estremi

In scenari di collasso gravitazionale (core–collapse di supernove, formazione di stelle di neutroni ipermassive o buchi neri), la Relatività Ristretta Planckiana (RRP) modifica la generazione del segnale rispetto alla Relatività Generale (RG) attraverso il "ripeso" energetico della sorgente. Si introduce il fattore

$$\gamma_E(E) = \frac{1}{\sqrt{1 - (E/E_{\mathrm{p}})^2}}\,, \qquad \Gamma_E \equiv \gamma_E^{-2} = 1 - (E/E_{\mathrm{p}})^2\ ,$$

e, per campi materiali con energia locale prossima a una frazione non trascurabile di E_{p}, il tensore materia che gravita viene attenuato come $T^{(\mathrm{eff})}_{\mu\nu} = \Gamma_E\, T_{\mu\nu}$. Nelle stime seguenti assumiamo Γ_E quasi costante nella regione emissiva durante l'intervallo temporale del burst.

Relazione di base (quadrupolo). In RG, il tensore di polarizzazione lontano dalla sorgente è

$$h^{\mathrm{TT}}_{ij}(t,\mathbf{x}) \simeq \frac{2G}{c^4 D}\,\ddot{Q}^{\mathrm{TT}}_{ij}(t - D/c)\,,$$

dove Q_{ij} è il momento di quadrupolo di massa della sorgente e D la distanza. In RRP, l'accoppiamento gravitazionale "vede" una sorgente efficace con masse $M_a^{\mathrm{eff}} = \Gamma_E M_a$ e densità $\rho^{\mathrm{eff}} = \Gamma_E \rho$, quindi

$$Q^{\mathrm{eff}}_{ij} = \int \rho^{\mathrm{eff}} \left(x_i x_j - \tfrac{1}{3}\delta_{ij} r^2\right) d^3x = \Gamma_E\, Q_{ij}\,,$$

e, a parità di cinematica interna, le seconde derivate temporali si scalano come $\ddot{Q}_{ij}^{\text{eff}} \simeq \Gamma_E \, \ddot{Q}_{ij}$. Ne segue

$$h_{ij,\text{RRP}}^{\text{TT}} \simeq \Gamma_E \, h_{ij,\text{RG}}^{\text{TT}} \, .$$

Lo strain di burst da collasso è quindi ridotto da un fattore Γ_E rispetto alla previsione RG con gli stessi profili cinematici.

Frequenze caratteristiche. Le frequenze di picco dei modi di oscillazione della protostella di neutroni e dell'instabilità dinamica di barra scalano come

$$f \sim \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{G M^{\text{eff}}}{R^3}} \, ,$$

con $M^{\text{eff}} = \Gamma_E M$ e raggio R debole-dipendente dall'equazione di stato. Trascurando correzioni di R indotte da Γ_E a primo ordine,

$$\frac{f_{\text{RRP}}}{f_{\text{RG}}} \simeq \sqrt{\Gamma_E} \, .$$

Per $\Gamma_E < 1$ si prevede un "red-tilt" del contenuto spettrale, con spostamento di f_{peak} verso frequenze più basse.

Energia irradiata e SNR. La potenza quadrupolare istantanea in RG è

$$P_{\text{RG}} = \frac{G}{5c^5} \left\langle \dddot{Q}_{ij} \dddot{Q}_{ij} \right\rangle \, .$$

In RRP, usando $Q_{ij}^{\text{eff}} = \Gamma_E Q_{ij}$, si ottiene a parità di cinematica

$$P_{\text{RRP}} \simeq \Gamma_E^2 \, P_{\text{RG}} \, , \qquad E_{\text{GW}}^{\text{RRP}} \simeq \Gamma_E^2 \, E_{\text{GW}}^{\text{RG}} \, .$$

In banda stretta, lo strain spettrale scala come

$$\tilde{h}_{\text{RRP}}(f) \simeq \Gamma_E \, \tilde{h}_{\text{RG}} \left(\frac{f}{\sqrt{\Gamma_E}} \right) ,$$

ossia ampiezza ridotta e picco spostato a $f_{\rm peak} \to \sqrt{\Gamma_E}\, f_{\rm peak}$. Per uno spettro a singolo picco, il rapporto di segnale-rumore (SNR) si approssima con

$$\mathrm{SNR}^2_{\rm RRP} \simeq 4\int \frac{|\tilde{h}_{\rm RRP}(f)|^2}{S_n(f)}\, df \simeq \Gamma_E^2\, 4\int \frac{\left|\tilde{h}_{\rm RG}(f')\right|^2}{S_n\left(\sqrt{\Gamma_E}\, f'\right)}\, df' ,$$

per cui la variazione di SNR dipende sia dall'abbassamento dell'ampiezza ($\propto \Gamma_E$) sia dal riposizionamento dello spettro rispetto alla curva di rumore S_n.

Tempi caratteristici del burst. I tempi di crescita delle instabilità idrodinamiche e magnetorotazionali scalano come

$$\tau \sim \Omega^{-1}, \qquad \Omega \sim \sqrt{\frac{GM^{\rm eff}}{R^3}} ,$$

quindi

$$\frac{\tau_{\rm RRP}}{\tau_{\rm RG}} \simeq \Gamma_E^{-1/2} .$$

Il burst risulta più "largo" nel dominio del tempo per $\Gamma_E < 1$, coerentemente con lo shift a basse frequenze.

Mappatura su parametri osservativi. L'inferenza bayesiana in RG ricava massa gravitazionale e raggio a partire da $f_{\rm peak}$ e dall'ampiezza. In presenza di RRP, un'analisi RG "ignara" subisce un bias sistematico. Per un indicatore $f_{\rm peak}$ calibrato come $f^{\rm RG}_{\rm peak}(M,R)$, la misura reale obbedisce a

$$f_{\rm obs} \simeq \sqrt{\Gamma_E}\, f^{\rm RG}_{\rm peak}(M,R) ,$$

che verrebbe interpretata in RG come una massa apparente $M_{\rm app}$ inferiore. Linearizzando,

$$\frac{\Delta f}{f} \equiv \frac{f_{\rm obs} - f_{\rm RG}}{f_{\rm RG}} \simeq -\frac{1}{2}\,(1-\Gamma_E) ,$$

per $(1-\Gamma_E) \ll 1$. Un test nullo consiste nel confrontare la massa inferita da onde gravitazionali con quella barionica indipendente da neutrini e fotoni del breakout; una discrepanza coerente con $\Delta f/f \simeq -\frac{1}{2}(1-\Gamma_E)$ segnerebbe un indizio a favore della RRP.

Chirp post-merger di doppie stelle di neutroni. Se il core collassato rimane temporaneamente sostenuto e produce un segnale quasi-periodico, la frequenza di deriva df/dt è in RG proporzionale al trasporto di energia angolare via onde

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{\mathrm{RG}} \propto f^n\, \mathcal{A}(M, R, \mathrm{EOS})\,,$$

con n dipendente dal meccanismo. In RRP,

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{\mathrm{RRP}} \simeq \Gamma_E^2 \left(\frac{df}{dt}\right)_{\mathrm{RG}}, \qquad f_{\mathrm{RRP}} \simeq \sqrt{\Gamma_E}\, f_{\mathrm{RG}}\,,$$

da cui una legge di deriva effettiva

$$\frac{df_{\mathrm{RRP}}}{dt} \simeq \Gamma_E^{2+n/2}\, \frac{df_{\mathrm{RG}}}{dt}\,.$$

Misure combinate di $\{f_{\mathrm{peak}},\, df/dt,\, h\}$ permettono di isolare Γ_E rompendo degenerazioni con l'equazione di stato.

Vincoli attesi e sensibilità. Se uno strumento è sensibile a un errore relativo minimo $\delta f/f$, la più piccola deviazione rilevabile dall'ipotesi RG corrisponde a

$$1-\Gamma_E \gtrsim 2\,\frac{\delta f}{f}\,.$$

Per $\delta f/f \sim 10^{-2}$ su un picco f_{peak} ben misurato, si ottiene un limite di ordine $1-\Gamma_E \gtrsim 2\times 10^{-2}$. In termini di rapporto energetico locale $\varepsilon \equiv E/E_{\mathrm{p}}$,

$$\Gamma_E = 1-\varepsilon^2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \lesssim \sqrt{2\,\frac{\delta f}{f}}\,.$$

Questo fornisce un criterio operativo per trasformare una misura spettrale in un limite diretto su ε in ambiente di collasso.

Osservabili riassuntivi. Le tre firme principali proposte sono

$$f_{\text{peak}}: \quad f_{\text{RRP}}/f_{\text{RG}} \simeq \sqrt{\Gamma_E}\,,$$

$$\text{ampiezza}: \quad h_{\text{RRP}}/h_{\text{RG}} \simeq \Gamma_E\,,$$

$$\text{energia irradiata}: \quad E_{\text{GW}}^{\text{RRP}}/E_{\text{GW}}^{\text{RG}} \simeq \Gamma_E^2\,.$$

La combinazione di questi tre rapporti, misurata evento per evento e confrontata con simulazioni idrodinamiche relativistiche, costituisce un test diretto e falsificabile della RRP in regime di collasso stellare estremo.

9 Falsificabilità

9.1 Condizioni di esclusione empirica

Obiettivo di questa sezione è specificare condizioni quantitative che, se verificate sperimentalmente, falsificano la RRP nel suo assetto minimo (cinematica planckiana, clock energetico con γ_E, materia "ripesata" da $T_{\mu\nu}^{(\text{eff})} = T_{\mu\nu}/\gamma_E^2$).

1) Violazione del bound energetico di Planck. Misura di un evento fisico localizzato con energia in un sistema inerziale tale che

$$E_{\text{event}} > (1+\delta)\,E_{\text{p}}$$

con incertezza complessiva ben caratterizzata e $\delta > 0$ (ad es. $\delta \sim 10^{-3}$) falsifica il Postulato 1 (invarianza e massimalità di E_{p}).

2) Assenza di dipendenza energetica del "clock" oltre i limiti consentiti. Il postulato 2 implica, per $E \ll E_{\text{p}}$,

$$\frac{d\tau_{\text{phys}}}{dt} = \gamma_E(E) = \frac{1}{\sqrt{1-(E/E_{\text{p}})^2}} = 1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{E}{E_{\text{p}}}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{E}{E_{\text{p}}}\right)^4.$$

Se un esperimento a energia caratteristica E stabilisce il limite

$$\left|\frac{d\tau_{\mathrm{phys}}}{dt} - 1\right| < \epsilon_{\mathrm{exp}}$$

e contemporaneamente vale

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{E}{E_{\mathrm{p}}}\right)^2 > \epsilon_{\mathrm{exp}},$$

la RRP è falsificata (poiché predice un effetto minimale superiore al bound osservativo).

3) Composizione dei "boost energetici" non conforme alla legge di gruppo. La cinematica RRP richiede, per parametri $\beta_i = E_i/E_{\mathrm{p}}$,

$$\beta_{12} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}, \qquad \gamma_{12} = \gamma_1\gamma_2\big(1 + \beta_1\beta_2\cos\theta\big)$$

(θ è l'angolo tra le direzioni). L'osservazione controllata di una sequenza di "energizzazioni" che realizzi un β_{12} statisticamente incompatibile con la relazione sopra falsifica la struttura di gruppo (e quindi il Postulato 3).

4) Rotazione di Wigner in composizioni non collineari mancante o con ampiezza sbagliata. Per due boost di rapidità ϕ_1, ϕ_2 e direzioni con prodotto scalare $\cos\theta$, l'angolo di Wigner deve soddisfare

$$\tan\!\left(\frac{\Omega}{2}\right)\hat{\mathbf{k}} = \frac{\sinh(\phi_1/2)\,\sinh(\phi_2/2)\,(\hat{\mathbf{n}}_2 \times \hat{\mathbf{n}}_1)}{\cosh(\phi_1/2)\cosh(\phi_2/2) + \cos\theta\,\sinh(\phi_1/2)\sinh(\phi_2/2)}.$$

Una misura che escluda Ω (o il suo segno/asse $\hat{\mathbf{k}}$) previsto a parità di ϕ_i e θ falsifica la cinematica RRP.

5) Soglie cinematiche e relazioni di dispersione a energia alta incompatibili con $m_{\text{eff}} = m\,\gamma_E$. Nel settore di particella libera si ha

$$H^2 = (pc_E)^2 + \left(m\,\gamma_E\,c_E^2\right)^2.$$

Qualsiasi fenomenologia di soglia (apertura/chiusura di canali a due corpi, produzione multi-particella) che richieda una relazione diversa o che risulti incompatibile con la sostituzione $m \to m\,\gamma_E(E)$ entro le incertezze sperimentali falsifica la dinamica RRP minima.

6) Redshift (cosmico o gravitazionale) privo della correzione planckiana minima. Nel quadro omogeneo-isotropo discusso in precedenza,

$$1 + z_{\text{RRP}} = \frac{a_0}{a_{\text{e}}}\,\frac{\gamma_E(E_{\text{e}})}{\gamma_E(E_0)}.$$

Se si dimostra sperimentalmente che, a parità di a_0/a_{e}, lo scarto

$$\left|\frac{\gamma_E(E_{\text{e}})}{\gamma_E(E_0)} - 1\right|$$

è inferiore a un limite che eccede la predizione minima $\sim \frac{1}{2}[(E_{\text{e}}^2 - E_0^2)/E_{\text{p}}^2]$, la RRP è falsificata.

7) Assenza di saturazione/attenuazione nel settore gravitazionale efficace. Con $T_{\mu\nu}^{(\text{eff})} = T_{\mu\nu}/\gamma_E^2$, osservabili che tracciano direttamente la "forza" della sorgente (ad esempio masse dinamiche, parametri di lente gravitazionale in regimi ad altissima densità/curvatura) devono mostrare la riduzione

$$\mathcal{S}_{\text{eff}} \propto \frac{1}{\gamma_E^2}.$$

La misura robusta di $\mathcal{S}_{\text{eff}}$ che escluda tale attenuazione al livello atteso per il valore stimato di E falsifica la RRP minimale.

8) Consistenza PPN oltre i limiti interni del modello minimo. Nel limite post-newtoniano della formulazione scalare-tensore minima vale

$$\gamma_{\mathrm{PPN}} - 1 \simeq -2\alpha_0^2, \qquad \beta_{\mathrm{PPN}} - 1 \simeq \tfrac{1}{2}\alpha_0^2\beta_0,$$

con $\alpha_0 = \frac{1}{2}f'(\varepsilon_0)/f(\varepsilon_0)$. La misurazione di γ_{PPN} e β_{PPN} incompatibili con qualsiasi scelta regolare di f nel range fisico $0 \le \varepsilon < 1$ falsifica la RRP in tale assetto.

9) Coerenza del gruppo di simmetria e assenza di superluminalità. La struttura $\mathrm{SO}^+(1,3)$ richiede l'invariante

$$s_E^2 = (c_E t)^2 - \|\mathbf{x}\|^2,$$

e la condizione $|\beta_E| < 1$ assicura $E < E_{\mathrm{p}}$. L'osservazione di trasformazioni cinematiche equivalenti a $|\beta_E| \ge 1$ o che violino l'invarianza di s_E^2 falsifica la teoria.

Protocollo statistico essenziale per i test di cui sopra. Si richiede: (i) modellizzazione e sottrazione dei bias sistematici; (ii) stima bayesiana o frequentista con intervalli credibili/confidenza che includano la propagazione di incertezze su E, distanza, calibrazioni; (iii) criteri di esclusione fissati a significatività $\ge 5\sigma$ (o Bayes factor decisivo) per dichiarare la falsificazione.

9.2 Confronto con osservazioni già disponibili (LIGO, JWST, telescopi gamma)

In questa sezione confrontiamo le previsioni operative della RRP con tre insiemi di dati già disponibili: onde gravitazionali (LIGO/Virgo/KAGRA), sorgenti ad alto redshift (JWST) e lampi di raggi gamma/AGN (Fermi–LAT, MAGIC, H.E.S.S.). Il punto-chiave della RRP, per i test in banda elettromagnetica e gravitazionale, è che per campi liberi massless si ha velocità di fase e di gruppo non dispersiva, $v_\gamma = c$ e $v_g = c$, e nessun termine di dispersione lineare in energia nello spazio piatto: ciò implica coerenza (a livello leading order) con i più stringenti vincoli di tempo-di-volo e di dispersione.

Onde gravitazionali (LIGO/Virgo/KAGRA). La RRP non modifica la cinematica dei gravitoni in vuoto: il limite previsto è

$$\left|\frac{v_g - c}{c}\right| \simeq 0 \quad \text{(RRP, vuoto)}.$$

Il confronto con la controparte osservativa multimessaggero fornisce il vincolo

$$\left|\frac{v_g - c}{c}\right| \lesssim 10^{-15},$$

ricavato dalla contemporanea rilevazione dell'onda gravitazionale GW170817 e del lampo gamma GRB 170817A[3]. Inoltre, dai dati è stato posto un limite sulla massa del gravitone compatibile con

$$m_g c^2 \lesssim 10^{-23}\ \text{eV}, \qquad \lambda_g = \frac{\hbar}{m_g c} \gtrsim 10^{13}\ \text{km},$$

coerente con l'assenza di dispersione per perturbazioni tensoriali in vuoto prevista dalla RRP[4]. Eventuali correzioni RRP possono entrare solo via effetti di γ_E in regioni di forte campo e alta energia locale (sorgente), ma non come dispersione di propagazione su grande distanza.

Sorgenti ad alto redshift (JWST). Le relazioni cinematica-di-vuoto della RRP si riducono al caso standard per $\epsilon = E/E_{\mathrm{p}} \ll 1$. Gli spettri e i redshift spettroscopici confermati da JWST fino a $z \simeq 13.2$ sono quindi compatibili, a livello puramente cinematico, con il limite RRP a bassa energia[5]. In questa sezione non introduciamo correzioni dinamico-cosmologiche (discusse altrove): qui rileviamo solo che la definizione osservativa di redshift e la misura di righe di

[3] B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), *Gravitational Waves and Gamma-rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A*, Phys. Rev. Lett. **119**, 161101 (2017), doi:10.1103/PhysRevLett.119.161101, arXiv:1710.05834.

[4] R. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), *GWTC-3: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the Second Part of the Third Observing Run*, arXiv:2111.03606 (2021).

[5] E. Curtis-Lake et al., *Spectroscopic confirmation of galaxies at redshifts greater than 10*, Nature Astronomy **7**, 622–632 (2023), doi:10.1038/s41550-023-01921-1.

emissione non richiedono dispersione fotonica in vuoto, in linea con la RRP.

Telescopi gamma (Fermi–LAT, MAGIC, H.E.S.S.). I vincoli più stretti da tempi-di-volo su fotoni di altissima energia escludono una dispersione lineare in energia del tipo

$$v_\gamma(E) \simeq c\left(1 \pm \frac{E}{M_{\mathrm{QG}}}\right)$$

con scala M_{QG} inferiore o comparabile a E_{p}; i dati richiedono

$$M_{\mathrm{QG},1} \gtrsim \mathcal{O}(E_{\mathrm{p}}),$$

coerente con la previsione RRP $v_\gamma(E) = c$ in vuoto (assenza di LIV lineare). In particolare, l'analisi del GRB 090510 rilevato dal Fermi GBM/LAT ha imposto che, se esistesse una violazione di Lorentz lineare, la scala dell'energia quantistica a cui appare dovrebbe superare la Scala di Planck[6]. Anche qui, eventuali effetti RRP entrano nel settore "di sorgente" via γ_E (clock/massa efficace) e non come termine di dispersione lungo il cammino.

Sintesi. (i) Cinematica di propagazione: la RRP, per campi massless in vuoto, è compatibile con i vincoli su v_g e l'assenza di dispersione fotonica/gravitazionale su scale astrofisiche; (ii) Settore di sorgente: eventuali scarti rispetto a GR standard possono emergere solo in ambienti ad altissima densità/curvatura (ruolo di γ_E), da cercare in fasi precoci di coalescenza o in transienti estremi; (iii) Non sono richieste (né consentite) nella RRP correzioni di tipo LIV lineare in energia nella propagazione su grande distanza, in accordo con i limiti attuali.

9.3 Confronto diretto con segnali previsti da DSR, Gravity's Rainbow e de Sitter invariant relativity

Obiettivo, ipotesi e notazione Confrontiamo in modo operativo le previsioni osservabili della Relatività Ristretta Planckiana

[6] V. Vasileiou et al. (Fermi LAT Collaboration), *Constraints on Lorentz Invariance Violation from Fermi-Large Area Telescope Observations of Gamma-Ray Bursts*, Phys. Rev. D **87**, 122001 (2013), doi:10.1103/PhysRevD.87.122001, arXiv:1305.3463.

(RRP) con tre famiglie di estensioni relativistiche: (i) la *Doubly Special Relativity* (DSR), (ii) *Gravity's Rainbow* (GRb), e (iii) la *de Sitter Special Relativity* (dSSR). Adotteremo le seguenti ipotesi comuni:

- Per RRP la struttura metrica resta minkowskiana, i boost sono caratterizzati dal parametro energetico $\beta_E = E/E_p$ e dal fattore $\gamma_E = (1-\beta_E^2)^{-1/2}$; poniamo $c_E = c$.
- In DSR le relazioni di dispersione sono debolmente deformate in potenze di L_p (o E_p^{-1}), con boost non lineari nello spazio degli impulsi.
- In GRb la metrica dipende dall'energia tramite funzioni adimensionali $f(E/E_p)$, $g(E/E_p)$.
- In dSSR il gruppo di simmetria è $SO(4,1)$, con raggio di curvatura $l^2 = 3/\Lambda$; localmente la velocità limite resta c.

Le grandezze cui confronteremo le teorie sono: velocità di fase/gruppo di campi massless, ritardi di tempo-di-volo su distanze cosmologiche, soglie cinematiche, redshift, ampiezze/frequenze di onde gravitazionali da sorgenti estreme.

Cinematica di propagazione dei campi massless: confronto dei segnali di dispersione

RRP (assenza di dispersione). Proposizione 1. In RRP la propagazione di campi massless in vuoto è non dispersiva: $v_{\rm ph} = v_{\rm gr} = c$, indipendentemente da E.

Dimostrazione. L'intervallo planckiano è $s_E^2 = (ct)^2 - |\vec{x}|^2$. Per curve nulle $s_E^2 = 0$ quindi $c^2dt^2 = d\vec{x}^{\,2}$ e $v \equiv |\mathrm{d}\vec{x}|/\mathrm{d}t = c$. Il fattore di clock $d\tau_{\rm phys} = \gamma_E(E)\, d\tau_{\rm geo}$ non interviene in una condizione di luce, che è puramente geometrica (nullità dell'intervallo). La fase $\phi = k_\mu x^\mu$ soddisfa $k^\mu k_\mu = 0$ e quindi $\omega = ck$. Dunque $v_{\rm ph} = \omega/k = c$ e $v_{\rm gr} = \partial\omega/\partial k = c$. $\square$

DSR (dispersione tipica). Una classe ampia di DSR adotta, a primo ordine in L_p, la relazione deformata

$$E^2 - c^2p^2 - m^2c^4 + \eta\, L_p\, c\, p^2 E + \mathcal{O}\!\left(L_p^2\right) = 0,$$

con η adimensionale. Per $m = 0$, risolvendo per $E(p)$ a primo ordine si ottiene

$$E(p) \simeq cp \left[1 - \frac{\eta}{2} \frac{L_p}{c} E\right] \quad \Rightarrow \quad v_{\rm gr} = \frac{\partial E}{\partial p} \simeq c\left(1 - \frac{\eta}{2} \frac{L_p}{c} E\right),$$

che implica ritardi $\Delta t \sim (\eta/2)\,(L_p/c)\,E\,L$ su una distanza L. *Segnale distintivo*: ritardi lineari (o potenze superiori) in E.

Gravity's Rainbow (dispersione geometrica). La metrica arcobaleno è $ds^2 = -(dt)^2/f^2 + d\vec{x}^2/g^2$. Curve nulle danno $|d\vec{x}|/dt = c(E) = c\,g/f$. Se $f \neq g$ si ha $v_{\rm ph} = v_{\rm gr} = c(E) \neq c$, determinando ritardi $\Delta t \sim \int (1/c(E) - 1/c)\, d\ell$. *Segnale*: velocità di luce energia-dipendente fissata da f, g.

dSSR (nessuna dispersione locale). In coordinate stereografiche $g_{\mu\nu} = \Omega^2(x)\eta_{\mu\nu}$. Per curve nulle $ds^2 = 0 \Rightarrow \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0$: localmente $v = c$. Non emergono ritardi energia-dipendenti; gli effetti sono geometrici (curvatura, non dispersione). *Segnale*: assenza di dispersione per fotoni/gravitoni, come in RRP.

Corollario osservativo. La misura di ritardi energia-dipendenti $\propto E^n$ $(n \geq 1)$ in tempo-di-volo di fotoni o gravitoni *esclude* RRP e dSSR e favorisce DSR/GRb; la non-osservazione sistematica favorisce RRP/dSSR e *disfavorisce* DSR/GRb con $n = 1$.

Soglie cinematiche e relazioni di dispersione massivo–massless

RRP (massa efficace ma luce standard). Per stati massivi in RRP: massa efficace $m_{\rm eff} = m\,\gamma_E$ e dispersione

$$E^2 = c^2p^2 + (m_{\rm eff}c^2)^2, \qquad m_{\rm eff} = m\left(1 - \frac{E^2}{E_p^2}\right)^{-1/2}.$$

Alle soglie $2 \to n$ con canali massivi, l'energia a soglia subisce uno shift *solo* via $m_{\rm eff}$, mentre i campi massless restano coni di luce standard. Le correzioni sono $\mathcal{O}\big((E/E_p)^2\big)$.

DSR (soglie modificate dal termine di LIV). La correzione $f \sim L_p c p^2 E$ altera gli invarianti di Mandelstam a $\mathcal{O}(L_p)$, producendo shift di soglia che possono essere $\mathcal{O}(E/E_p)$ e non puramente $\mathcal{O}((E/E_p)^2)$. *Segnale*: deformazioni di soglia lineari (o con potenze inferiori a 2) non presenti in RRP.

GRb (soglie metriche). La dipendenza (f, g) entra nella definizione locale degli invarianti. Se le stesse funzioni valgono per tutti i campi, le soglie ereditano la dipendenza energetica geometrica. *Segnale*: shift di soglia controllati da f, g, correlati a segnali di tempo-di-volo.

dSSR (soglie geometriche globali). Le traslazioni standard sono sostituite da combinazioni con trasformazioni conformi; in collisioni locali su scale $\ll l$ gli effetti di soglia sono soppressi da potenze di $1/l$. *Segnale*: nessuna anomalia di soglia su scale non cosmologiche.

Redshift e drift del redshift

RRP. La frequenza misurata dal clock planckiano è $\nu_{\text{phys}} = -(k_\mu u^\mu)/(2\pi\gamma_E)$. Per sorgenti/osservatori comoventi in FRW:

$$1 + z_{\text{RRP}} = \frac{a_0}{a_e}\,\frac{\gamma_E(\epsilon_o)}{\gamma_E(\epsilon_e)}.$$

Con $\epsilon_o \simeq 0$ si ottiene una lieve riduzione del redshift apparente: $\Delta z \simeq -\frac{1}{2}\epsilon_e^2(1 + z_{\text{FRW}})$.

DSR e GRb. In DSR, eventuali termini di LIV possono entrare nella misura di $(k_\mu u^\mu)$ per effetto di dispersione; in GRb, se $f \neq g$, la definizione operativa di tempo coord. e lunghezza scala diversamente con E, con fattori addizionali $\propto f, g$ già nelle geodetiche nulle. *Segnale*: correzioni al redshift *lineari* o comunque non quadratiche in ϵ.

dSSR. Il redshift è puramente geometrico: $1 + z = a_0/a_e$ (per comoventi). Nessun fattore energia-dipendente. *Segnale*: identico al caso FRW standard.

Onde gravitazionali da collassi estremi: ampiezza, frequenza e chirp

RRP (attenuazione di sorgente). Nel regime lineare

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T^{(\text{eff})}_{\mu\nu}, \qquad T^{(\text{eff})}_{\mu\nu} = \frac{1}{\gamma_E^2} T_{\mu\nu}.$$

Al quadrupolo

$$h^{\text{RRP}}_{ij} \simeq \Gamma_E \, h^{\text{RG}}_{ij}, \qquad \Gamma_E \equiv \gamma_E^{-2} = 1 - \left(\frac{E}{E_p}\right)^2,$$

e le frequenze caratteristiche scalano come $f_{\text{RRP}}/f_{\text{RG}} \simeq \sqrt{\Gamma_E}$. *Segnale*: combinazione (h, f, E_{GW}) che verifica $h \propto \Gamma_E$, $f \propto \sqrt{\Gamma_E}$, $E_{\text{GW}} \propto \Gamma_E^2$.

DSR e GRb (dispersione di propagazione). Se le onde gravitazionali soddisfano una dispersione modificata (DSR) o una metrica energia-dipendente (GRb), allora, oltre (o in luogo) di effetti di sorgente, emerge dispersione in propagazione:

$$v_g(f) \neq c, \qquad \Delta t \sim \int \left[\frac{1}{v_g(f)} - \frac{1}{c}\right] d\ell,$$

con deformazioni di fase accumulate su grandi distanze. *Segnale*: *decoerenza di fase* frequenza-dipendente lungo la propagazione, assente in RRP.

dSSR (assenza di dispersione e sorgente GR-like). Localmente $v_g = c$; su scale $\ll l$ le sorgenti seguono RG. *Segnale*: nessuna dispersione di propagazione; nessuna attenuazione Γ_E di tipo RRP.

Teoremi di non-equivalenza operativa

Teorema A (tempo-di-volo). Sia $\Delta t(E)$ il ritardo fra due fotoni/gravitoni di energie $E_1 \neq E_2$ emessi co-fase da una stessa sorgente e rivelati dopo una distanza L. Se $\Delta t(E)$ contiene un termine $\propto E^n$ con $n \geq 1$ non sopprimibile geometricamente (Λ-indipendente), allora RRP e dSSR sono escluse, mentre DSR/GRb sono compatibili.

Dimostrazione. In RRP e dSSR $v_{\text{gr}} = c$ localmente ed Δt non dipende da E (salvo effetti di sorgente non-disperdenti). In DSR e GRb si ha $v_{\text{gr}}(E) \neq c$ per $m = 0$, producendo inevitabilmente $\Delta t(E) \propto E^n$ a primo ordine efficace in L_p o nei rapporti f, g. $\square$

Teorema B (triplice discriminante GW). Sia un burst gravitazionale con $(h_{\text{obs}}, f_{\text{peak,obs}}, E_{\text{GW,obs}})$. Se i dati soddisfano simultaneamente

$$\frac{h_{\text{obs}}}{h_{\text{GR}}} \simeq \Gamma_E, \qquad \frac{f_{\text{peak,obs}}}{f_{\text{GR}}} \simeq \sqrt{\Gamma_E}, \qquad \frac{E_{\text{GW,obs}}}{E_{\text{GW,GR}}} \simeq \Gamma_E^2,$$

per una $\Gamma_E \in (0, 1)$ indipendente dalla distanza di propagazione, allora il segnale è compatibile con RRP ed *esclude* una pura dispersione di propagazione (tipica DSR/GRb) e dSSR.

Dimostrazione. La scalatura $\{1, \frac{1}{2}, 2\}$ in potenza di Γ_E è una firma di *sorgente* nel termine quadrupolare, non riproducibile con una sola deformazione di propagazione, che agisce principalmente sulla fase e sul tempo-di-volo, non simultaneamente su ampiezza ed energia in quel rapporto. In dSSR non compare alcun fattore Γ_E. $\square$

Tavola di discriminanti osservativi (riassunto)

r

Osservabile	RRP	DSR	GRb	dSSR
ToF massless	0	$\propto E^n$	$\propto E$ via f, g	0
Soglie	$\propto (E/E_p)^2$ via m_{eff}	$\propto E/E_p$ tipico	f, g-dip.	$\ll 1$ (curv.)
Redshift	$\times \gamma_E(\epsilon_o)/\gamma_E(\epsilon_e)$	LIV-dip.	f, g-dip.	standard
GW: fase	no disp.	disp.	disp.	no disp.
GW: (h, f, E_{GW})	$\propto \{\Gamma_E, \sqrt{\Gamma_E}, \Gamma_E^2\}$	no	no	no

Programma di test incrociato e criteri di esclusione

Test 1 (tempo-di-volo multi-messenger). Misurare $\Delta t(E)$ per fotoni e, ove possibile, per componenti in frequenza dei segnali GW:

$$\Delta t_{\text{fit}}(E) \stackrel{?}{=} \alpha \left(\frac{E}{E_p}\right)^n L + \beta,$$

con α compatibile con zero $\Rightarrow$ favore a RRP/dSSR; $\alpha \neq 0 \Rightarrow$ favore a DSR/GRb.

Test 2 (triplice firma GW di sorgente). Per burst di collasso o post-merger, verificare

$$\frac{h_{\text{obs}}}{h_{\text{GR}}} \simeq \Gamma_E, \quad \frac{f_{\text{obs}}}{f_{\text{GR}}} \simeq \sqrt{\Gamma_E}, \quad \frac{E_{\text{GW,obs}}}{E_{\text{GW,GR}}} \simeq \Gamma_E^2.$$

Compatibilità statistica $\Rightarrow$ favore a RRP; incompatibilità $\Rightarrow$ favore a GR standard/DSR/GRb.

Test 3 (soglie cinematiche). Scansioni near-threshold in collider o nei flussi UHECR: presenza di shift $\propto E/E_p \Rightarrow$ favore a DSR; assenza (entro limiti) $\Rightarrow$ favore a RRP/dSSR.

Conclusioni comparative

- **RRP** prevede *nessuna dispersione* di propagazione per campi massless e introduce *solo* effetti di sorgente via $T_{\mu\nu}^{(\text{eff})} = T_{\mu\nu}/\gamma_E^2$, con firme scalari $\{\Gamma_E, \sqrt{\Gamma_E}, \Gamma_E^2\}$ su (h, f, E_{GW}).
- **DSR** produce dispersione (tipicamente lineare o a bassa potenza in E/E_p) e soglie modificate già a $\mathcal{O}(E/E_p)$; *segno* forte: ritardi ToF energia-dipendenti.
- **Gravity's Rainbow** codifica dispersione geometrica attraverso f, g, con segnali analoghi a DSR ma legati a scelte funzionali metriche; *segno* forte: $c(E) = cg/f$.
- **dSSR** mantiene $v = c$ localmente e differisce solo per effetti geometrici globali $\propto 1/l$; nessuna dispersione o soglie anomale su scale non cosmologiche.

In sintesi, *tempo-di-volo* e *triplice firma GW* consentono un *confronto diretto* e *falsificabile* tra RRP, DSR, GRb e dSSR: la presenza sistematica di dispersione seleziona DSR/GRb; la sua assenza, unita a firme di sorgente $\propto \Gamma_E$, discrimina a favore della RRP rispetto a dSSR.

8. Discussione e prospettive

In questa sezione mettiamo a confronto sistematico la Relatività Ristretta Planckiana (RRP) con tre famiglie di estensioni relativistiche ampiamente discusse in letteratura — la Relatività a due scale invarianti (DSR), la Gravity's Rainbow e la Relatività Speciale de Sitter (dSSR) — e con il programma di gravità quantistica a loop (LQG). Lo scopo è chiarire somiglianze strutturali, differenze concettuali e connessioni operative, nonché derivare criteri osservativi che separino in modo netto le predizioni della RRP da quelle dei modelli concorrenti.

8.1 Confronto sistematico con DSR, Gravity's Rainbow, de Sitter Relativity e Loop Quantum Gravity

Assiomi di riferimento della RRP. Ricapitoliamo il nucleo assiomatico della RRP: esiste una scala energetica invariante E_p e la cinematica conserva l'algebra di Lorentz, con parametro adimensionale $\beta_E \equiv E/E_p$ e fattore

$$\gamma_E = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_E^2}}, \qquad 0 \le \beta_E < 1.$$

L'intervallo planckiano

$$s_E^2 = (c\,t)^2 - \|\vec{x}\|^2$$

è invariante e la struttura di gruppo è isomorfa a $SO(1,3)$. La dinamica estesa si realizza sostituendo il tensore materia con

$$T_{\mu\nu}^{(\mathrm{eff})} = \frac{1}{\gamma_E^2}\, T_{\mu\nu},$$

preservando le identità di Bianchi e quindi la consistenza variazionale. Per campi massless in vuoto la velocità di fase e di gruppo coincide con c.

8.1.1 DSR (Doubly Special Relativity) vs RRP

Cinematica e dispersione. In DSR si postula l'invarianza simultanea di c e di una scala L_p (o E_p) deformando le trasformazioni di Lorentz nello spazio degli impulsi. Una classe ampia di relazioni di dispersione è del tipo

$$E^2 - c^2p^2 - m^2c^4 + f(E, p; L_p) = 0,$$

con correzioni, a bassa energia,

$$f(E, p; L_p) \simeq \tilde{L}_p \, c \, p^2 E + \cdots .$$

Ne discende, per stati massless, una velocità di gruppo energia-dipendente

$$v_g(E) = \frac{\partial E}{\partial p} \simeq c \left(1 - \kappa \, \frac{E}{E_p} + \cdots \right),$$

con κ dipendente dal modello.

Trasformazioni e "soccer-ball problem". I boost DSR sono non lineari e realizzano un'algebra deformata (tipicamente κ-Poincaré). Le leggi di composizione di energia e impulso non sono univoche e, nella forma più semplice, inducono il cosiddetto problema "soccer-ball": la deformazione microscopica non si riassorbe automaticamente per stati composti macroscopici.

RRP: teoremi di base in confronto. Teorema 8.1 (invarianza e non-dispersione in vuoto). Sia $\beta_E = E/E_p$. Le trasformazioni

$$\Lambda(\phi_E) = \left(rr \begin{matrix} \cosh\phi_E & -\sinh\phi_E \\ -\sinh\phi_E & \cosh\phi_E \end{matrix} \right), \qquad \tanh\phi_E = \beta_E,$$

lasciando invariante s_E^2, implicano per un'onda piana massless $\omega = ck$ che la velocità di gruppo in vuoto è

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c.$$

Dimostrazione. L'invarianza di s_E^2 assicura l'isotropia del cono di luce $\omega = ck$ in tutti i sistemi inerziali. Poiché la RRP non deforma la relazione di dispersione dei campi liberi in vuoto, $\omega(k)$ resta lineare. Quindi $v_g = \partial\omega/\partial k = c$. □

Teorema 8.2 (assenza di "soccer-ball problem" in RRP). Sia $\beta_i = E_i/E_p$ e si definisca la composizione energetica per sistemi composti con la legge

$$\beta_{12} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}.$$

Allora $0 \leq \beta_{12} < 1$ se $0 \leq \beta_1, \beta_2 < 1$, e per N composti $\beta_{1\cdots N} < 1$ per induzione.

Dimostrazione. La funzione artanh linearizza la composizione: definendo $\phi_i = \operatorname{artanh}(\beta_i)$, si ha

$$\phi_{12} = \phi_1 + \phi_2, \qquad \beta_{12} = \tanh(\phi_{12}),$$

e quindi $\beta_{12} < 1$. L'estensione a N segue per induzione additiva sulla rapidità. □

Implicazioni. A differenza della DSR generica, la RRP mantiene $v_g = c$ in vuoto ed evita problemi di composizione per sistemi estesi, pur introducendo una nuova scala invariante E_p. I test di tempo-di-volo su scale astrofisiche sono quindi nulli a livello leading-order per la propagazione libera, e i segnali distintivi della RRP risiedono nella *sorgente* ($T_{\mu\nu}^{(\text{eff})}$) e nel *clock* ($\gamma_E$).

8.1.2 Gravity's Rainbow vs RRP

Metrica "arcobaleno". In Gravity's Rainbow si postula una famiglia di metriche energia-dipendenti

$$ds^2(E) = -\frac{dt^2}{f^2(E/E_{Pl})} + \frac{d\vec{x}^{\,2}}{g^2(E/E_{Pl})},$$

con

$$\lim_{E/E_{Pl}\to 0} f = 1, \qquad \lim_{E/E_{Pl}\to 0} g = 1.$$

La velocità dei massless è in generale

$$c(E) = \frac{g(E/E_{Pl})}{f(E/E_{Pl})}\, c,$$

e può essere energia-dipendente.

Proposizione 8.3 (condizione di riduzione a RR). Se $c(E) = c$ per ogni E e $E/E_{Pl} \ll 1$, allora $f(E) \equiv g(E)$ in un intorno di $E = 0$.

Dimostrazione. Dalla definizione $c(E) = \frac{g}{f}c$, la condizione $c(E) = c$ implica $g(E) = f(E)$. Per continuità delle funzioni adimensionali, questa identità vale in un intorno di $E = 0$. $\square$

Proposizione 8.4 (non equivalenza globale con RRP). La RRP, con metrica universale e $v_g = c$ in vuoto, è globalmente non equivalente a Gravity's Rainbow salvo il caso banale $f \equiv g \equiv 1$.

Dimostrazione. In RRP l'intervallo s_E^2 è universale e non dipende da E. Se esistesse un'uguaglianza con una metrica arcobaleno non banale, si avrebbe una E-dipendenza dello spazio-tempo percepito dai campi liberi, in contraddizione con la non-dispersione in vuoto (Teorema 8.1). L'unico caso compatibile è $f \equiv g \equiv 1$. $\square$

Dinamica ed osservabili. Rainbow introduce anche $G(E)$ e $\Lambda(E)$, mentre la RRP mantiene G e Λ costanti e "ripesa" le sorgenti con $1/\gamma_E^2$. In cosmologia, Rainbow sposta l'orizzonte tramite $c(E)$, mentre la RRP regolarizza i termini materia con $\rho_{\text{eff}} = \rho/\gamma_E^2$, ammettendo un bounce senza introdurre dispersione in propagazione.

8.1.3 de Sitter Special Relativity (dSSR) vs RRP

Gruppo e costante universale. La dSSR sostituisce Poincaré con $SO(4,1)$ e introduce una lunghezza $l = \sqrt{3/\Lambda}$ come costante universale. La metrica stereografica è

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2(x)\,\eta_{\mu\nu}, \qquad \Omega(x) = \frac{1}{1 - \sigma^2/4l^2}.$$

Il limite $\Lambda \to 0$ ($l \to \infty$) recupera Minkowski.

Proposizione 8.5 (commutatività dei limiti deboli). Nel dominio congiunto $E/E_p \ll 1$ e $\sigma^2/l^2 \ll 1$, i limiti $E/E_p \to 0$ (RRP→RR) e $\Lambda \to 0$ (dSSR→RR) commutano all'ordine più basso:

$$\lim_{\Lambda \to 0} \lim_{E/E_p \to 0} = \lim_{E/E_p \to 0} \lim_{\Lambda \to 0} .$$

Dimostrazione. Entrambe le estensioni riducono le correzioni a termini quadratici piccoli (β_E^2 per RRP, σ^2/l^2 per dSSR). All'ordine più basso, le perturbazioni si sommano linearmente e i due limiti eliminano indipendentemente i rispettivi correttivi, restituendo la RR. □

Differenze operative. La dSSR è una deformazione *geometrica* controllata da Λ (scala cosmologica), la RRP è una estensione *energetica* controllata da E_p (scala ultravioletta). La prima ha firme soprattutto su scale cosmologiche, la seconda su processi ad altissima energia e in forti campi. Le due estensioni sono logicamente ortogonali e potenzialmente componibili in un'analisi a doppia scala (Λ, E_p).

8.1.4 Loop Quantum Gravity (LQG) vs RRP

Natura della teoria. La LQG è una quantizzazione canonica background-independent della gravità con variabili di Ashtekar, stati di rete di spin e dinamica a vincoli (Gauss, diffeomorfismi spaziali, Hamiltoniano). La RRP è una estensione *classica* della relatività con una scala energetica invariante e una dinamica efficace $T^{(\mathrm{eff})}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}/\gamma_E^2$.

Confronto di equazioni efficaci in cosmologia. LQC (riduzione omogenea-isotropa di LQG) suggerisce equazioni efficaci del tipo

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\,\rho\left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right) + \cdots ,$$

con ρ_c vicino alla densità di Planck. La RRP propone

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho}{\gamma_E^2} - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}, \qquad \gamma_E = \frac{1}{\sqrt{1-(E/E_p)^2}}.$$

In entrambi i casi l'effetto netto ad alta energia è una *saturazione* del contributo gravitante della materia, che evita la singolarità ($a_{\min} > 0$), sebbene l'origine sia diversa: ρ-correzioni quantistiche in LQC, ripeso energetico universale in RRP.

Osservazioni. La LQG è una proposta di *quantizzazione* della gravità con propri osservabili (spettri discreti di area e volume), mentre la RRP è una *estensione classica* minimalmente invasiva. Le due prospettive sono complementari: i vincoli osservativi che selezionano γ_E in RRP possono fornire condizioni al contorno per efficaci semiclassici in LQG/LQC; viceversa, analisi di LQG sul regime di Planck possono motivare dipendenze $\gamma_E(E)$ più micro-fondate.

8.1.5 Tabella di confronto sintetico

Caratteristica	**RRP**	**DSR**	**Rainbow**	**dSSR**
Costante nuova	E_p	L_p (o E_p)	E_{Pl} in f, g	Λ ($l = \sqrt{3/\Lambda}$)
Gruppo	$SO(1,3)$ intatto	κ-Poincaré (deformato)	dipendente da E	$SO(4,1)$
Dispersione massless (vuoto)	$\omega = ck$	$\omega(k)$ deformata	$c(E) = \frac{g}{f}\,c$	$\omega = ck$
Origine effetti	γ_E, $T^{(\text{eff})}_{\mu\nu}$	boost non lineari	metrica $g_{\mu\nu}(E)$	curvatura costante
Bounce cosmico	ρ/γ_E^2	modello dipendente	$c(E)$, $G(E)$, $\Lambda(E)$	curvatura Λ
Problemi noti	—	soccer-ball, ambiguità	non-località, princ. d'equivalenza	osservabilità debole

8.1.6 Prospettive sperimentali discriminatorie

Propagazione libera massless. La RRP prevede

$$\Delta t_{\text{TOF}} \simeq 0 \quad \text{(vuoto, leading)},$$

mentre molte realizzazioni DSR/Rainbow implicano $\Delta t_{\mathrm{TOF}} \propto (E/E_p)\, L/c$ oppure $\propto (E/E_p)^2\, L/c$. Misure *null* su Δt favoriscono la RRP e la dSSR rispetto a schemi con $c(E) \neq c$.

Settore di sorgente. La RRP modifica ampiezze e frequenze *alla sorgente* tramite

$$T^{(\mathrm{eff})}_{\mu\nu} = \frac{T_{\mu\nu}}{\gamma_E^2}, \qquad f_{\mathrm{peak}} \mapsto \sqrt{\Gamma_E}\, f_{\mathrm{peak}}, \quad \Gamma_E \equiv \gamma_E^{-2},$$

mentre DSR/Rainbow tipicamente predicono segnali in propagazione. La combinazione $(f_{\mathrm{peak}},\, h,\, E_{\mathrm{GW}})$ in transienti compatti permette di isolare Γ_E.

Cinematica delle soglie. In RRP le soglie sono influenzate da masse efficaci

$$m_{\mathrm{eff}} = m\, \gamma_E,$$

con correzioni $\mathcal{O}\big((E/E_p)^2\big)$ ultra-piccole a energie di laboratorio, mentre in DSR le leggi di conservazione possono risultare debolmente modificate già a primo ordine in L_p.

8.1.7 Conclusioni del confronto

La RRP emerge come estensione *speculare* della Relatività Ristretta: conserva il gruppo $SO(1,3)$, postula una scala energetica invariante E_p e sposta le firme fisiche dai fenomeni di *propagazione* (spesso esclusi sperimentalmente) a quelli di *sorgente* e di *clock*. DSR e Gravity's Rainbow esplorano deformazioni cinematiche e metriche che, pur eleganti algebricamente, incontrano tensioni empiriche e concettuali (dispersione lineare/quadratica, principio di equivalenza, non-località). La dSSR introduce la costante Λ su basi geometriche, con effetti su scale cosmologiche; la LQG fornisce un quadro quantistico background-independent, potenzialmente complementare alla RRP sul piano efficace.

In prospettiva, una *fenomenologia a doppia scala* (E_p, Λ) che combini RRP e dSSR, insieme a vincoli da transienti compatti e cosmologia di precisione, rappresenta il banco di prova più promettente per discriminare in modo definitivo fra queste estensioni relativistiche.

8.2 Implicazioni concettuali della dualità $c \leftrightarrow E_p$

Questa sezione chiarisce il significato logico della sostituzione strutturale che porta dalla Relatività Ristretta standard, fondata sull'invarianza della velocità della luce, alla Relatività Ristretta Planckiana, in cui il ruolo di quantità invariante è assunto da una scala energetica universale. La tesi è che esiste un dizionario matematico coerente che mappa le affermazioni cinematiche della relatività einsteiniana nel dominio delle energie attraverso la corrispondenza $\beta \equiv v/c \longleftrightarrow \beta_E \equiv E/E_\mathrm{p}$ e $\gamma \longleftrightarrow \gamma_E$, mantenendo invariati gruppo, causalità e struttura di spazio–tempo per i campi massless e spostando gli effetti nuovi nel settore dei clock e delle sorgenti.

Dizionario di dualità. Il parallelismo è governato dalle due quantità adimensionali $\beta = \frac{v}{c}$ e $\beta_E = \frac{E}{E_\mathrm{p}}$, con fattori di Lorentz $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ e $\gamma_E = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_E^2}}$. Le trasformazioni planckiane si ottengono dalla forma canonica di Lorentz mediante la sostituzione $\beta \mapsto \beta_E$ e producono la stessa legge di composizione in rapidità $\phi = \operatorname{artanh}\beta$, $\phi_E = \operatorname{artanh}\beta_E$, ossia $\phi_{12} = \phi_1 + \phi_2$ e $\phi_{E,12} = \phi_{E,1} + \phi_{E,2}$. Il cono di luce resta definito da $s^2 = (c\,t)^2 - \|\vec{x}\|^2$ e per curve nulle la relazione $\omega = c\,k$ rimane valida, con velocità di fase e di gruppo $v_\mathrm{ph} = v_\mathrm{gr} = c$.

Proposizione 1 (isomorfismo cinematica–energia). Sia $\Lambda(\phi) \in SO^+(1,3)$ una trasformazione di boost con rapidità ϕ. La mappa $\Phi : \phi \mapsto \phi_E$ definita da $\tanh\phi = \frac{v}{c}$ e $\tanh\phi_E = \frac{E}{E_\mathrm{p}}$ realizza un isomorfismo di gruppo tra il sottogruppo dei boost standard e il sottogruppo "energetico" generato da ϕ_E: si ha $\Lambda(\phi_2)\Lambda(\phi_1) = \Lambda(\phi_1 + \phi_2)$ e, in modo speculare, $B_E(\phi_{E,2})B_E(\phi_{E,1}) = B_E(\phi_{E,1} + \phi_{E,2})$.

Dimostrazione. Segue dall'additività delle rapidità e dall'identità $\tanh(\alpha + \beta) = \tanh\alpha \oplus \tanh\beta$ con $\oplus$ la legge frazioni-lineare $(x \oplus y) = \frac{x+y}{1+xy}$. Poiché tanh è biettiva su $(-1, 1)$, la corrispondenza è un isomorfismo. $\square$

Corollario (bound e chiusura). La condizione $|\beta| < 1$ implica $\gamma < \infty$; la condizione $|\beta_E| < 1$ implica $\gamma_E < \infty$. La legge di composizione $\beta_{12} = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}$ ha il gemello $\beta_{E,12} = \frac{\beta_{E,1}+\beta_{E,2}}{1+\beta_{E,1}\beta_{E,2}}$. Ne segue la stabilità del bound $|v| < c$ e, specularmente, $|E| < E_\mathrm{p}$ sotto composizione.

Proposizione 2 (invarianza dell'intervallo e non-dispersione massless). Nel settore dei campi privi di massa la condizione di nullità $s^2 = 0$ implica $\omega = c\,k$. La dualità non altera tale relazione perché agisce sui parametri di boost tramite $\beta \mapsto \beta_E$ senza modificare la metrica piatta $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. Quindi $v_\mathrm{ph} = \frac{\omega}{k} = c$ e $v_\mathrm{gr} = \frac{\partial\omega}{\partial k} = c$.

Dimostrazione. Dalla definizione di curva nulla e dalla linearità della dispersione in vuoto segue immediatamente l'uguaglianza delle due velocità alla costante c. □

Clock planckiano e dualità delle dilatazioni temporali. Nel dominio standard la dilatazione temporale è $\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}t}{\gamma}$. Nel dominio energetico la dinamica introduce un "clock" fisico $\mathrm{d}\tau_\mathrm{phys} = \gamma_E\, \mathrm{d}\tau_\mathrm{geo}$ con $\mathrm{d}\tau_\mathrm{geo} = \frac{\mathrm{d}t}{\gamma_v}$. La simmetria concettuale è: la velocità limita la crescita di γ, l'energia limita la crescita di γ_E; nel limite $\beta \to 1^-$ il tempo di coordinate si dilata rispetto al proprio, mentre nel limite $\beta_E \to 1^-$ il tempo proprio fisico si "accelera" rispetto a quello geometrico. In entrambi i casi la quantità invariante (c oppure E_p) emerge come costante che satura il rispettivo parametro adimensionale.

Principio di corrispondenza e recupero di basse energie. Il dizionario $\frac{v}{c} \leftrightarrow \frac{E}{E_\mathrm{p}}$ rispetta il principio di corrispondenza: per $|v| \ll c$ si ha $\gamma \simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$, mentre per $|E| \ll E_\mathrm{p}$ si ha $\gamma_E \simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{E^2}{E_\mathrm{p}^2}$. In particolare, per $\epsilon \equiv E/E_\mathrm{p}$ piccolo, tutte le quantità cinematiche e dinamiche della teoria planckiana si riducono alle rispettive espressioni relativistiche classiche con correzioni quadratiche in ϵ.

Causalità, gruppi e assenza di paradossi cinetici. Poiché l'algebra di Lie resta $\mathfrak{so}(1,3)$ con generatori J_i e K_i che soddisfano $[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k$, $[J_i, K_j] = \epsilon_{ijk} K_k$, $[K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk} J_k$, l'assetto di causalità e il cono di luce non sono intaccati dalla dualità; ciò assicura l'assenza di paradossi cinetici nella composizione di trasformazioni non collineari, dove compare la rotazione di Wigner con la consueta struttura $SO(3)$. La dualità agisce sui parametri di boost senza alterare né l'invariante s^2 né la chiusura del gruppo.

Energia invariante come costante "universale" complementare. L'introduzione di E_p come costante universale complementare a c realizza una forma di complementarità UV/IR: c regola i rapporti spaziali–temporali e il limite sulle velocità, E_p regola la "velocità" dei processi di clock e un limite superiore sull'energia di stato che entra nei fattori di scala dinamici. Questa duplicità preserva la struttura minkowskiana per la propagazione libera e sposta i nuovi effetti in quantità direttamente collegate alla misura del tempo proprio e alla risposta delle sorgenti, mantenendo invariati i test di propagazione a grande distanza per campi massless.

Conclusione. La dualità $c \leftrightarrow E_p$ fornisce un principio organizzatore semplice e potente: tutte le costruzioni cinematiche della relatività ristretta si riproducono sostituendo $\frac{v}{c}$ con $\frac{E}{E_\mathrm{p}}$ a livello di parametri di boost e fattori di Lorentz, mentre l'invariante geometrico, il gruppo di simmetria e la propagazione dei campi senza massa restano identici al caso einsteiniano. Le differenze fisicamente rilevanti emergono nei clock e nelle sorgenti attraverso γ_E, rispettando corrispondenza, causalità e chiusura di gruppo, e delineando un quadro concettuale privo di paradossi e direttamente agganciato a osservabili operativi.

8.3 Collegamento con la Relatività Generale Planckiana

Scopo di questo paragrafo (solo accennato qui) è mostrare il *dizionario* concettuale e matematico che collega la Relatività Ristretta Planckiana (RRP), formulata su spazio-tempo piatto con intervallo planckiano invariante, alla sua estensione geometrica in spaziotempo curvo, la Relatività Generale Planckiana (RGP). L'ideachiave è promuovere la dipendenza energetica globale della RRP, codificata in $\gamma_E(\epsilon)$ con $\epsilon \equiv E/E_\mathrm{p}$, a un campo (o parametro) $\epsilon(x)$ localmente definito su una varietà lorentziana $(\mathcal{M}, g)$, preservando l'invarianza locale di Lorentz e le identità di Bianchi.

Dizionario RRP $\to$ RGP (schema minimale).

- Metrica di Minkowski $\eta_{\mu\nu} \longrightarrow$ metrica dinamica $g_{\mu\nu}(x)$.
- Parametro costante $\epsilon = E/E_{\mathrm{p}} \longrightarrow$ profilo locale $\epsilon(x) \in [0,1)$.
- Fattore di clock $\gamma_E(\epsilon) \longrightarrow$ ripesatura universale della materia tramite $f(\epsilon) \equiv \gamma_E(\epsilon)^{-2}$.
- Invarianza dell'intervallo planckiano $s_E^2 = (c\,t)^2 - \|\vec{x}\|^2 \longrightarrow$ propagazione *locale* su coni di luce di $g_{\mu\nu}$ con campi massless non dispersi (a livello cinematico): $\omega = c\,k$.

Tempo proprio e tetrodi. Il fattore di clock della RRP generalizza a spazio-tempo curvo come

$$\mathrm{d}\tau_{\mathrm{phys}} \;=\; \gamma_E\big(\epsilon(x)\big)\,\mathrm{d}\tau_{\mathrm{geo}}, \qquad \mathrm{d}\tau_{\mathrm{geo}}^2 \;=\; \frac{1}{c^2}\,g_{\mu\nu}(x)\,\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu.$$

Equivalentemente, in una base tetradica $e^a{}_\mu(x)$ (con $g_{\mu\nu} = \eta_{ab}\,e^a{}_\mu e^b{}_\nu$) la misura fisica dei tempi è riscalata da γ_E, mentre la cinematica dei campi massless resta ancorata al cono nullo di $g_{\mu\nu}$ (quindi nessuna dispersione di vuoto è introdotta dalla sola sostituzione di clock).

Azione efficace e sorgenti. Una realizzazione minimale del collegamento è ottenuta sostituendo, nel settore materia,
$S_{\mathrm{m}}^{(\mathrm{eff})}[g,\psi;\epsilon] = \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\; f(\epsilon(x))\,\mathcal{L}_{\mathrm{m}}(g,\psi), \qquad f(\epsilon) \equiv \gamma_E(\epsilon)^{-2} = 1-\epsilon^2$
e mantenendo l'azione gravitazionale di Einstein–Hilbert. La variazione rispetto a $g^{\mu\nu}$ produce un tensore energia–impulso efficace

$$T_{\mu\nu}^{(\mathrm{eff})} \;=\; f\big(\epsilon(x)\big)\,T_{\mu\nu}\,,$$

così che le equazioni di campo planckiane, nella forma più semplice (con ϵ trattato come dato esterno), sono

$$G_{\mu\nu} + \Lambda\,g_{\mu\nu} \;=\; \frac{8\pi G}{c^4}\,T_{\mu\nu}^{(\mathrm{eff})} \;=\; \frac{8\pi G}{c^4}\,\frac{1}{\gamma_E(\epsilon)^2}\,T_{\mu\nu}.$$

Se $\epsilon = \text{const.}$, si recupera direttamente la prescrizione RRP $T_{\mu\nu}^{(\mathrm{eff})} = T_{\mu\nu}/\gamma_E^2$.

Identità di Bianchi e consistenza locale. Poiché $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$, segue

$$\nabla^\mu T^{(\mathrm{eff})}_{\mu\nu} \;=\; 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^\mu T_{\mu\nu} \;=\; -\,T_{\mu\nu}\,\nabla^\mu \ln f(\epsilon)\,,$$

ossia uno scambio locale di quattro–momento tra settore materia e settore planckiano (se $\epsilon = \epsilon(x)$ varia), coerente con il principio di conservazione totale. Nel caso $\epsilon = \mathrm{const.}$ si ha $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$.

Proposizione (limite di compatibilità RRP $\to$ RGP). Sia una soluzione inerziale RRP su $\eta_{\mu\nu}$ con $|\beta_E| < 1$, $\beta_E \equiv E/E_{\mathrm{p}}$, e sia $\epsilon = \mathrm{const.}$. Allora la soluzione RGP corrispondente è ottenuta sostituendo $\eta_{\mu\nu} \mapsto g_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu} \mapsto T_{\mu\nu}/\gamma_E^2$, lasciando invariata la propagazione di campi massless in vuoto e riscalando le grandezze temporali *misurate* da $\mathrm{d}\tau_{\mathrm{phys}} = \gamma_E\,\mathrm{d}\tau_{\mathrm{geo}}$.

Dimostrazione (schizzo). La sostituzione di cui sopra soddisfa le equazioni di campo con sorgente efficace e rispetta $\nabla^\mu T^{(\mathrm{eff})}_{\mu\nu} = 0$. La nullità dell'intervallo per campi massless si conserva, quindi $\omega = ck$ localmente. □

Osservazioni operative (rinvio a lavoro dedicato).

- In cosmologia omogenea–isotropa, scegliendo $\epsilon = \epsilon(t)$ o $\epsilon = \mathrm{const.}$, le equazioni efficaci si riducono a una ripesatura $\rho \mapsto \rho/\gamma_E^2$ e $p \mapsto p/\gamma_E^2$, con conseguente attenuazione del contributo gravitante della materia ad alte energie.

- In geometrie stazionarie e sferiche, la massa attiva *efficace* scala come $M_{\mathrm{eff}} = M/\gamma_E^2$, lasciando inalterata la struttura di vuoto esterna ma modificando i parametri caratteristici *alla sorgente.*

- Una formulazione completamente covariante può promuovere ϵ a campo scalare con cinetica e potenziale, mantenendo l'invarianza di Lorentz locale e la ben–posta variazionale.

Sintesi. La RGP eredita dalla RRP la dualità tra *clock* (γ_E) e *sorgente* ($T^{(\mathrm{eff})}_{\mu\nu}$), collocandola in un quadro geometrico pienamente covariante: i campi massless propagano localmente su $(\mathcal{M}, g)$ senza dispersione di vuoto, mentre gli effetti planckiani emergono nel settore della materia/curvatura tramite la ripesatura universale $T_{\mu\nu} \mapsto T_{\mu\nu}/\gamma_E^2$ (o, in formulazioni equivalenti, tramite una metrica effettiva nel settore temporale). Le deduzioni complete (equazioni variazionali, stabilità e test) sono sviluppate nell'articolo dedicato alla Relatività Generale Planckiana.

8.4 Aperture verso una unificazione con la meccanica quantistica

Obiettivo e criteri. Una formulazione quantistica compatibile con la Relatività Ristretta Planckiana (RRP) deve: (i) preservare la causalità locale (coni di luce invarianti), (ii) mantenere l'unitarietà (positività del generatore temporale) e (iii) ridursi alla teoria quantistica standard nel limite $\epsilon \equiv E/E_\mathrm{p} \to 0$. In RRP l'invariante è l'intervallo planckiano $s_E^2 = (c\,t)^2 - \|\vec{x}\|^2$ e la struttura di gruppo resta isomorfa a $SO(1,3)$; gli effetti planckiani entrano attraverso il *clock* energetico via il fattore $\gamma_E(\epsilon) = (1-\epsilon^2)^{-1/2}$, senza deformare i coni nulli. Questo consente una quantizzazione che conserva microcausalità e analiticità di scattering, spostando le novità nel *settore di sorgente/clock.*

(A) Dalla Hamilton–Jacobi planckiana alla meccanica quantistica a una particella. Nel quadro RRP la funzione azione $S(x)$ per una particella libera soddisfa

$$\frac{1}{c^2}\,(\partial_t S)^2 - \|\nabla S\|^2 = (m_\mathrm{eff}\,c)^2, \qquad m_\mathrm{eff} \equiv m\,\gamma_E(\epsilon),$$

con m massa a riposo e m_eff massa efficace di clock. L'elevazione canonica $p_\mu \mapsto \hat{p}_\mu \equiv i\hbar\partial_\mu$ produce l'equazione di Klein–Gordon planckiana

$$\left(\Box + \frac{m_\mathrm{eff}^2 c^2}{\hbar^2}\right)\phi = 0, \qquad \Box \equiv \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \nabla^2,$$

mentre per fermioni si ottiene l'equazione di Dirac

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - m_\mathrm{eff}c)\,\psi = 0.$$

La relazione di dispersione resta $\omega^2 = c^2k^2 + (m_{\text{eff}}c^2/\hbar)^2$ e, per stati massless, $\omega = ck$ (nessuna dispersione). Nel limite $\epsilon \to 0$ segue $m_{\text{eff}} \to m$ e si recuperano le equazioni standard.

(B) Azione di worldline e integrale di Feynman. L'azione di particella in RRP $S[\vec{x}(t)] = -mc^2\int \gamma_E(\epsilon)\sqrt{1-\frac{\|\dot{\vec{x}}\|^2}{c^2}}\,dt = -mc\int d\tau_{\text{phys}}, \qquad d\tau_{\text{phys}} \equiv \gamma_E\,d\tau_{\text{geo}}$, definisce il propagatore come somma sui cammini

$$K(x_f, x_i) = \int \mathcal{D}x\,\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S[x]\right\}.$$

Se γ_E è costante nel settore considerato (stati stazionari), il kernel coincide con quello standard a massa m_{eff}. Se $\gamma_E = \gamma_E(x)$ varia lentamente, un'espansione WKB ordina le correzioni in $\nabla\gamma_E$ senza alterare i coni nulli, preservando microcausalità.

(C) Teoria dei campi libera e interazioni minime. Per un campo scalare reale ϕ e un campo di Dirac ψ su spazio piatto:

$$\mathcal{L}_0^{(\phi)} = \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{m_{\text{eff}}c}{\hbar}\right)^2\phi^2, \qquad \mathcal{L}_0^{(\psi)} = \bar{\psi}\left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - m_{\text{eff}}c\right)\psi.$$

L'accoppiamento elettromagnetico minimale $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + \frac{iq}{\hbar}A_\mu$ resta *inalterato*; le identità di Ward–Takahashi seguono come in QED perché la corrente di Noether è invariata (il cono di luce non cambia). Il tensore energia–impulso canonico è quello standard con $m \to m_{\text{eff}}$. Microcausalità: $[\phi(x), \phi(y)] = 0$ per separazione spacelike poiché il propagatore di Pauli–Jordan dipende solo dall'invariante $(x-y)^2$.

(D) Scattering, analiticità e LSZ. Il teorema LSZ si applica immutato: gli stati asintotici sono definiti sulle shell $p^2 = m_{\text{eff}}^2c^2$. Le funzioni di Green hanno la stessa struttura analitica di polo/taglio, con i poli fisici traslati in m_{eff}. L'assenza di dispersione per campi massless garantisce che la regione di Jost e i domini di microcausalità coincidano con quelli standard; l'unitarietà della matrice S segue dalla conservazione della corrente di probabilità.

(E) Promozione quantistica del γ_E: campo planckiano. Una via sistematica alla dinamica quantistica del clock è introdurre un campo scalare $\varepsilon(x) \in [0,1)$ con $\gamma_E(\varepsilon) = (1-\varepsilon^2)^{-1/2}$ e lagrangiana canonica

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \tfrac{\kappa}{2}\,\partial_\mu\varepsilon\,\partial^\mu\varepsilon - U(\varepsilon),$$

accoppiato alla materia tramite un peso $f(\varepsilon) = \gamma_E(\varepsilon)^{-2} = 1 - \varepsilon^2$. A livello efficace piatto, $\mathcal{L}_{\text{int}} = -\,\dfrac{\lambda}{2}\,\varepsilon^2\,\Phi^2$ (scalari) oppure $\mathcal{L}_{\text{int}} = -\,\lambda\,\varepsilon^2\,\bar{\psi}\psi$ (fermioni), riproduce $m_{\text{eff}}^2 \simeq m^2\big[1 + \langle\varepsilon^2\rangle + \cdots\big]$. Stabilità richiede $\kappa > 0$ e $U''(\varepsilon_0) \geq 0$; l'assenza di ghost e tachioni garantisce ben–posto e unitarietà. Nel limite $\varepsilon \to 0$ la teoria torna esattamente standard.

(F) Principio di indeterminazione e "clock" planckiano. Poiché i coni nulli non sono deformati, le commutazioni $[\hat{x}^i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta^i{}_j$ restano intatte. La risoluzione temporale misurata da un clock planckiano è $d\tau_{\text{phys}} = \gamma_E\,d\tau_{\text{geo}}$; per processi controllati sperimentalmente il bound operativo assume la forma

$$\Delta\tau_{\text{phys}}\,\Delta E \;\gtrsim\; \tfrac{\hbar}{2}\,\langle\gamma_E\rangle,$$

mostrando che a parità di ΔE un clock più "veloce" ($\gamma_E > 1$) degrada la risoluzione in τ_{phys} in modo controllato ma non introduce non–linearità nella struttura di Hilbert.

(G) Rinormalizzabilità ed effettività. A energie $\epsilon \ll 1$ la sostituzione $m \to m_{\text{eff}}$ non altera il conteggio di potenze: QED/QCD restano rinormalizzabili. A energie prossime a E_{p} la descrizione è *effettiva*: l'espansione in ϵ produce operatori locali soppressi da potenze di E_{p}^{-1}, con coefficiente controllato da $\nabla\gamma_E$ quando il clock varia spazialmente. L'unitarietà parziale–onda è preservata finché $\gamma_E < \infty$ ($|\epsilon| < 1$).

(H) Sintesi operativa.

- *Propagazione*: nessuna dispersione per campi massless ($\omega = ck$); microcausalità e coni di luce invarianti.
- *Spettri*: per campi massivi, shift $m \to m_{\text{eff}} = m\,\gamma_E$ induce correzioni a livelli legati $\mathcal{O}(\epsilon^2)$.
- *Scattering*: LSZ e analiticità invariate; poli a $p^2 = m_{\text{eff}}^2 c^2$.

- *Clock quantistico*: un campo $\varepsilon(x)$ implementa dinamicamente γ_E mantenendo stabilità ($\kappa > 0$, $U'' \geq 0$) e conservazione di corrente.

Queste aperture forniscono un ponte coerente fra la struttura cinetica della RRP e la meccanica quantistica/QFT standard: *la causalità e l'unitarietà sono preservate*, mentre gli effetti planckiani emergono come *riscalamenti di clock/massa* e, se resi dinamici, come una *debole* nuova interazione scalare universalmente accoppiata. Nel limite $\epsilon \to 0$ ogni costruzione qui esposta si riduce senza ambiguità alla teoria quantistica convenzionale.

Appendici

A Calcoli variazionali dettagliati

Convenzioni. Firma metrica $(+,-,-,-)$, connessione di Levi-Civita ∇_μ, d'Alembertiano $\Box \equiv g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$. Poniamo $c_E = c$ salvo diversa indicazione. La costante di Planck energetica è $E_\mathrm{p} = \sqrt{\hbar c^5/G}$. Introduciamo un campo scalare adimensionale locale $\epsilon(x) \in [0,1)$ e il fattore planckiano

$$\gamma_E(\epsilon) \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}}, \qquad f(\epsilon) \equiv \frac{1}{\gamma_E(\epsilon)^2} = 1-\epsilon^2.$$

Il settore materia classico è descritto da una lagrangiana $L_\mathrm{m}(g,\psi)$ (dipendenza implicita dai campi ψ).

A.1 Azione totale e termini al bordo

Si consideri l'azione

$$S[g,\epsilon,\psi] \;=\; S_g \;+\; S_\epsilon \;+\; S_\mathrm{m}^{(\mathrm{eff})} \;+\; S_\mathrm{GHY},$$

dove

$$S_g \;=\; \frac{c^3}{16\pi G}\int d^4x\,\sqrt{-g}\,R, \qquad S_\mathrm{GHY} = \frac{c^3}{8\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} d^3y\,\sqrt{|h|}\,K,$$

$$S_\epsilon \;=\; \int d^4x\,\sqrt{-g}\left[-\frac{\kappa}{2}\,g^{\mu\nu}(\nabla_\mu\epsilon)(\nabla_\nu\epsilon) - U(\epsilon)\right], \qquad \kappa > 0,$$

$$S_\mathrm{m}^{(\mathrm{eff})} \;=\; \int d^4x\,\sqrt{-g}\;f(\epsilon)\,L_\mathrm{m}(g,\psi).$$

Il termine di Gibbons–Hawking–York S_GHY rende ben posto il problema variazionale con frontiera a metrica fissata.

A.2 Identità variazionali di base

Per una variazione arbitraria $\delta g^{\mu\nu}$ valgono

$$\delta\sqrt{-g} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{\mu\nu}\, \delta g^{\mu\nu}, \qquad \delta R = (R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)\, \delta g^{\mu\nu}.$$

Per il campo scalare

$$\delta\Big[(\nabla\epsilon)^2\Big] = 2\,(\nabla^\mu\epsilon)(\nabla^\nu\epsilon)\,\delta g_{\mu\nu} - 2\,(\Box\epsilon)\,\delta\epsilon + \text{divergenza}.$$

A.3 Variazione rispetto alla metrica e tensori energia–impulso

Variare S rispetto a $g^{\mu\nu}$ (con $\delta\epsilon = 0 = \delta\psi$) e usare S_{GHY} per cancellare i termini di bordo che provengono da δR. Si ottiene

$$\frac{c^3}{16\pi G}\, G_{\mu\nu} \;=\; \frac{1}{2}\, T^{(\epsilon)}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\, f(\epsilon)\, T^{(\text{m})}_{\mu\nu},$$

ossia

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\Big[T^{(\epsilon)}_{\mu\nu} + f(\epsilon)\, T^{(\text{m})}_{\mu\nu}\Big].$$

Qui

$$T^{(\text{m})}_{\mu\nu} \;\equiv\; -\frac{2}{\sqrt{-g}}\,\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\Big(\int d^4x\,\sqrt{-g}\,L_{\text{m}}\Big), \qquad T^{(\epsilon)}_{\mu\nu} \;\equiv\; \kappa\,(\nabla_\mu\epsilon)(\nabla_\nu\epsilon) - g_{\mu\nu}\Big[\frac{\kappa}{2}(\nabla\epsilon)^2 + U(\epsilon)\Big].$$

Poiché $f(\epsilon)$ è uno scalare *indipendente* da $g_{\mu\nu}$, la sua presenza in $S^{(\text{eff})}_{\text{m}}$ produce solo il prefattore $f(\epsilon)$ davanti a $T^{(\text{m})}_{\mu\nu}$.

A.4 Variazione rispetto a epsilon: equazione di campo e sorgente di materia

La variazione di S rispetto a ϵ (a metrica e ψ fissati) fornisce

$$\delta S_\epsilon = \int d^4x\,\sqrt{-g}\,\Big[-\kappa\,\Box\epsilon - U'(\epsilon)\Big]\delta\epsilon, \qquad \delta S^{(\text{eff})}_{\text{m}} = \int d^4x\,\sqrt{-g}\, f'(\epsilon)\, L_{\text{m}}\,\delta\epsilon,$$

da cui

$$\boxed{\kappa\,\Box\epsilon \;-\; U'(\epsilon) \;+\; f'(\epsilon)\, L_{\text{m}} \;=\; 0}$$

con $f'(\epsilon) = -2\epsilon$. Questa equazione mostra l'accoppiamento non minimale tra ϵ e la lagrangiana di materia.

A.5 Conservazione totale e corrente di scambio

La diffeomorfismo-invarianza, assieme alle identità di Bianchi $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$, implica

$$\nabla^\mu \big[T^{(\epsilon)}_{\mu\nu} + f(\epsilon)\, T^{(\mathrm{m})}_{\mu\nu}\big] = 0.$$

Usando l'equazione di ϵ si trova

$$\nabla^\mu T^{(\epsilon)}_{\mu\nu} = \big[\kappa\,\Box\epsilon - U'(\epsilon)\big]\nabla_\nu\epsilon = -f'(\epsilon)\, L_\mathrm{m}\, \nabla_\nu\epsilon,$$

$$\nabla^\mu\big[f(\epsilon)\, T^{(\mathrm{m})}_{\mu\nu}\big] = f(\epsilon)\, \nabla^\mu T^{(\mathrm{m})}_{\mu\nu} + f'(\epsilon)\, (\nabla^\mu\epsilon)\, T^{(\mathrm{m})}_{\mu\nu}.$$

Se il settore materia è minimamente accoppiato (quindi $\nabla^\mu T^{(\mathrm{m})}_{\mu\nu} = 0$ in assenza di accoppiamenti aggiuntivi), allora

$$\nabla^\mu T^{(\epsilon)}_{\mu\nu} = -Q_\nu, \qquad \nabla^\mu\big[f\, T^{(\mathrm{m})}_{\mu\nu}\big] = +Q_\nu, \qquad Q_\nu \equiv f'(\epsilon)\, L_\mathrm{m}\, \nabla_\nu\epsilon,$$

ossia lo scambio di 4-impulso tra ϵ e materia è controllato da Q_ν. La *conservazione totale* è sempre soddisfatta.

A.6 Limite epsilon costante e forma $T^{(\mathrm{eff})}_{\mu\nu}$

Se $\epsilon = \epsilon_0$ è costante, $\nabla\epsilon = 0$ e $\Box\epsilon = 0$; l'equazione per ϵ si riduce al vincolo algebrico

$$-U'(\epsilon_0) + f'(\epsilon_0)\, L_\mathrm{m} = 0.$$

Il tensore del campo scalare diventa $T^{(\epsilon)}_{\mu\nu} = -U(\epsilon_0)\, g_{\mu\nu}$, che si riassorbe in una costante cosmologica efficace $\Lambda_\mathrm{eff} = \Lambda + \frac{8\pi G}{c^4} U(\epsilon_0)$. Le equazioni di campo assumono la forma

$$G_{\mu\nu} + \Lambda_\mathrm{eff}\, g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\Big[f(\epsilon_0)\, T^{(\mathrm{m})}_{\mu\nu}\Big].$$

Scrivendo $f(\epsilon_0) = \gamma_E(\epsilon_0)^{-2}$ si identifica

$$\boxed{T^{(\mathrm{eff})}_{\mu\nu} = \frac{1}{\gamma_E(\epsilon_0)^2}\, T^{(\mathrm{m})}_{\mu\nu},}$$

cioè la sostituzione $T_{\mu\nu} \mapsto T^{(\mathrm{eff})}_{\mu\nu}$ usata nel corpo principale.

A.7 Forma hamiltoniana e densità di energia efficace (sketch)

In un $3+1$–split ADM con metrica spaziale h_{ij}, lapse N e shift N^i, la densità hamiltoniana totale (ignorando vincoli secondari) legge schematicamente

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\rm GR}[h_{ij}, \pi^{ij}] + \mathcal{H}_\epsilon[\epsilon, \pi_\epsilon] + N\, f(\epsilon)\, \rho_{\rm m} + N^i\, f(\epsilon)\, j_i^{\rm m},$$

dove $\rho_{\rm m}$ e $j_i^{\rm m}$ sono, rispettivamente, densità di energia e corrente di materia. Ne segue che, al livello dei vincoli, la *sorgente efficace* è ridotta di $f(\epsilon) = 1 - \epsilon^2$.

A.8 Linearizzazione: equazioni di Friedmann modificate

Per background FLRW, $ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2\, d\vec{x}^2$, $\epsilon = \epsilon(t)$ omogeneo, e fluido perfetto di materia (ρ, p), dalle equazioni di campo precedenti si ricavano (per κ e U trascurabili a livello di background, o assorbiti in $\Lambda_{\rm eff}$)

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\, \frac{\rho}{\gamma_E(\epsilon)^2} - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda_{\rm eff} c^2}{3},$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\, \frac{\rho + 3p/c^2}{\gamma_E(\epsilon)^2} + \frac{\Lambda_{\rm eff} c^2}{3},$$

in accordo con le formule usate nella sezione cosmologica dell'articolo.

A.9 Settore particellare in spaziotempo curvo: principio d'azione

Per una particella di massa m su worldline $x^\mu(\lambda)$, con 4-velocità $u^\mu = dx^\mu/d\lambda$, la versione minimale coerente con il *clock* planckiano è

$$S_{\rm pp} = -mc^2 \int d\lambda\; \gamma_E(\epsilon(x))\, \sqrt{g_{\mu\nu}(x)\, u^\mu u^\nu},$$

da cui

$$p_\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial u^\mu} = -m\,\gamma_E\,\frac{g_{\mu\nu}u^\nu}{\sqrt{g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta}}.$$

La variazione rispetto a x^μ fornisce equazioni geodetiche *forzate* da gradienti di γ_E:

$$u^\nu\nabla_\nu u^\mu = -\left(\delta^\mu_{\ \sigma} - \frac{u^\mu u_\sigma}{u^2}\right)\nabla^\sigma \ln\gamma_E(\epsilon),$$

che si riducono alle geodetiche di Levi-Civita quando $\nabla\gamma_E = 0$.

A.10 Espansioni perturbative per epsilon piccolo

Per $\epsilon \ll 1$ si hanno

$$\gamma_E(\epsilon) = 1 + \tfrac{1}{2}\epsilon^2 + \tfrac{3}{8}\epsilon^4 + \mathcal{O}(\epsilon^6), \qquad f(\epsilon) = 1 - \epsilon^2.$$

Al primo ordine non banale,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda_{\text{eff}}\,g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\left[T^{(\epsilon)}_{\mu\nu} + T^{(\text{m})}_{\mu\nu} - \epsilon^2\,T^{(\text{m})}_{\mu\nu}\right] + \mathcal{O}(\epsilon^4),$$

da cui l'attenuazione efficace della sorgente $\propto \epsilon^2$.

A.11 Osservazioni su ben-posto, stabilità e PPN (cenni tecnici)

Per $\kappa > 0$ e $U''(\epsilon_0) \geq 0$, le perturbazioni scalari $\delta\epsilon$ hanno lagrangiana quadratica canonica

$$\mathcal{L}^{(2)}_\epsilon = -\frac{\kappa}{2}\,(\partial\delta\epsilon)^2 - \frac{1}{2}\,m_\epsilon^2(\delta\epsilon)^2, \qquad m_\epsilon^2 = U''(\epsilon_0) + \cdots,$$

senza ghost né tachioni. In regime post-newtoniano, definendo $A(\epsilon) = \sqrt{f(\epsilon)}$, i parametri PPN effettivi sono (a grandi distanze)

$$\gamma_{\text{PPN}} - 1 \simeq -\frac{2\alpha_0^2}{1+\alpha_0^2}, \qquad \beta_{\text{PPN}} - 1 \simeq \tfrac{1}{2}\alpha_0^2\beta_0, \qquad \alpha_0 \equiv \left.\frac{d\ln A}{d\epsilon}\right|_{\epsilon_0}, \ \beta_0 \equiv \left.\frac{d\alpha}{d\epsilon}\right|_{\epsilon_0}.$$

fornendo condizioni dirette per i test solari ($|\alpha_0|^2 \ll 10^{-5}$, ecc.).

Sintesi. L'apparato variazionale qui derivato mostra che: (i) le equazioni di Einstein si modificano con una sorgente totale $T_{\mu\nu}^{(\epsilon)} + f(\epsilon)T_{\mu\nu}^{(\mathrm{m})}$; (ii) l'equazione del campo ϵ è $\kappa\Box\epsilon - U'(\epsilon) + f'(\epsilon)L_{\mathrm{m}} = 0$; (iii) la conservazione totale è garantita e il trasferimento di 4-momento è $Q_\nu = f'(\epsilon)L_{\mathrm{m}}\nabla_\nu\epsilon$; (iv) nel limite $\epsilon = \mathrm{const.}$ si recupera la forma efficace $T_{\mu\nu}^{(\mathrm{eff})} = T_{\mu\nu}^{(\mathrm{m})}/\gamma_E^2$ usata nel testo principale, con una Λ_{eff} eventualmente corretta da $U(\epsilon_0)$.

B Algebra dei generatori e struttura di simmetria

Convenzioni e obiettivo. L'intervallo planckiano (cinematica 3+1) è $s_E^2 = (c_E t)^2 - \|\boldsymbol{x}\|^2, \qquad \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1), \qquad X^\mu = (c_E t, \boldsymbol{x}),$

ed è preservato da trasformazioni lineari reali Λ tali che

$$\Lambda^\top \eta \, \Lambda = \eta.$$

Il gruppo connesso all'identità di tutte tali trasformazioni è isomorfo al gruppo di Lorentz proprio e ortocrono $SO^+(1,3)$. In questa Appendice costruiamo rigorosamente la sua *algebra di Lie*, i generatori infinitesimi (rotazioni $\boldsymbol{J}$ e boost energetici $\boldsymbol{K}$), i *Casimir*, le decomposizioni $su(2) \oplus su(2)$, la rappresentazione $SL(2,\mathbb{C})$ e la classificazione dei *little groups*. Tutte le identità sono indipendenti dalla specifica interpretazione planckiana del parametro di boost $\beta_E = E/E_{\mathrm{p}}$ (con $|\beta_E| < 1$) e coincidono strutturalmente con la cinematica lorentziana standard.

Algebra infinitesima da $\Lambda^\top \eta \, \Lambda = \eta$. Sia $\Lambda(\varepsilon) = \mathbb{1} + \varepsilon\, G + O(\varepsilon^2)$ una curva di gruppo con $\Lambda(0) = \mathbb{1}$. La condizione di invarianza implica, a primo ordine in ε,

$$(\mathbb{1} + \varepsilon G)^\top \eta \, (\mathbb{1} + \varepsilon G) = \eta \quad \Longrightarrow \quad \eta G + G^\top \eta = 0.$$

Gli operatori G che soddisfano $\eta G + G^\top \eta = 0$ formano l'algebra di Lie $\mathfrak{so}(1,3)$. Introduciamo i generatori anti-simmetrici $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$

come base canonica:

$$(M_{\mu\nu})^{\rho}{}_{\sigma} = \eta_{\mu\sigma}\,\delta^{\rho}{}_{\nu} - \eta_{\nu\sigma}\,\delta^{\rho}{}_{\mu}.$$

Un generico elemento G si espande come $G = \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}$ con $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$.

Commutatori generali e riduzione a $\boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}$. Dalla rappresentazione precedente segue il *commutatore di Lorentz*

$$[\,M_{\mu\nu},\, M_{\rho\sigma}\,] = \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} + \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho}.$$

Definiamo i generatori fisici

$$J_i \equiv \tfrac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\,M_{jk}, \qquad K_i \equiv M_{0i}, \qquad i,j,k \in \{1,2,3\},$$

dove ϵ_{ijk} è il simbolo di Levi–Civita con $\epsilon_{123} = +1$. I commutatori si riducono a

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk}J_k, \qquad [J_i, K_j] = \epsilon_{ijk}K_k, \qquad [K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk}J_k.$$

Questa è precisamente l'algebra $\mathfrak{so}(1,3)$, con $\boldsymbol{J}$ che chiude in $\mathfrak{so}(3)$ e $\boldsymbol{K}$ che trasforma come vettore sotto rotazioni.

Rappresentazione esplicita 4×4. Nel sistema di coordinate $(0,1,2,3) = (t,x,y,z)$ si possono scegliere

$$(J_1)^{\mu}{}_{\nu} = \left(\text{rr}\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{matrix}\right), \quad (J_2)^{\mu}{}_{\nu} = \left(\text{rr}\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right), \quad (J_3)^{\mu}{}_{\nu} = \left(\text{rr}\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right),$$

$$(K_1)^{\mu}{}_{\nu} = \left(\text{rr}\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right), \quad (K_2)^{\mu}{}_{\nu} = \left(\text{rr}\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right), \quad (K_3)^{\mu}{}_{\nu} = \left(\text{rr}\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right).$$

È immediato verificare che $\eta J_i + J_i^{\top}\eta = 0$ e $\eta K_i + K_i^{\top}\eta = 0$, e che i commutatori sopra sono soddisfatti.

Esponenziale di gruppo e trasformazioni finite. Per un angolo θ e un versore $\hat{\boldsymbol{n}}$,

$$R(\hat{\boldsymbol{n}}, \theta) = \exp(\,\theta\,\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{J}\,), \qquad B_E(\hat{\boldsymbol{n}}, \phi_E) = \exp(\,\phi_E\,\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{K}\,),$$

dove la *rapidità energetica* ϕ_E è definita da

$$\tanh\phi_E = \beta_E = \frac{E}{E_\mathrm{p}}, \qquad \cosh\phi_E = \gamma_E, \qquad \sinh\phi_E = \gamma_E\,\beta_E.$$

La legge di composizione dei boost segue dal lemma di Baker–Campbell–Hausdorff (BCH). Per boost non collineari, il termine $[K_i, K_j] \propto -J_k$ genera una rotazione finita (rotazione di Wigner), coerente con la cinematica sviluppata nel testo principale.

Decomposizione $su(2) \oplus su(2)$. Definiamo i combinatori complessi

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J} + i\,\boldsymbol{K}), \qquad \boldsymbol{B} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J} - i\,\boldsymbol{K}).$$

Si verifica

$$[A_i, A_j] = \epsilon_{ijk}A_k, \qquad [B_i, B_j] = \epsilon_{ijk}B_k, \qquad [A_i, B_j] = 0,$$

ossia $\mathfrak{so}(1,3)_\mathbb{C} \cong \mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{su}(2)$. Le rappresentazioni irriducibili della componente connessa $SO^+(1,3)$ sono etichettate da coppie (j_+, j_-) di spin semi-interi.

Casimir dell'algebra. Con $M^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}M_{\alpha\beta}$, i due invarianti di Lie (commutano con tutti i generatori) sono

$$C_1 = \frac{1}{2}\,M_{\mu\nu}M^{\mu\nu} = \boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{K}^2, \qquad C_2 = \frac{1}{4}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,M^{\mu\nu}M^{\rho\sigma} = \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{K}.$$

La prova che $[C_a, M_{\alpha\beta}] = 0$ $(a = 1, 2)$ segue dall'identità di Jacobi e dalla completa anti-simmetria di $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$.

Rappresentazione di copertura $SL(2,\mathbb{C})$. Associare a un 4-vettore X^μ la matrice hermitiana $X = X^\mu\sigma_\mu$ ($\sigma_0 = \mathbb{1}$, σ_i di Pauli). Ogni $\Lambda \in SO^+(1,3)$ è indotta da un $S \in SL(2,\mathbb{C})$ tramite

$$X \longmapsto X' = S\,X\,S^\dagger, \qquad \det X' = \det X = \eta_{\mu\nu}X^\mu X^\nu = s_E^2.$$

Rotazioni e boost corrispondono a

$$S_R(\hat{\boldsymbol{n}}, \theta) = \exp\Big(-\frac{i}{2}\,\theta\,\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\Big), \qquad S_B(\hat{\boldsymbol{n}}, \phi_E) = \exp\Big(+\frac{1}{2}\,\phi_E\,\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\Big).$$

La moltiplicazione $S_2 S_1$ riproduce via identità di Pauli la decomposizione *boost+rotazione* e fornisce, in forma chiusa, l'angolo di Wigner (visto nel corpo del testo).

Little groups (classificazione orbits). Dato un 4-vettore p^μ, il *little group* $W(p) \subset SO^+(1,3)$ è l'isotropo di p: $\Lambda p = p$. Si trovano tre classi: (i) timelike $(p^2>0): \; W(p)\cong SO(3)$, (ii) lightlike $(p^2=0): \; W(p)\cong E(2)$, (iii) spacelike $(p^2<0): \; W(p)\cong SO(2,1)$.

Questa classificazione governa le rappresentazioni unitarie indotte (teoria di Wigner) e non dipende dalla parametrizzazione planckiana del boost.

Legame con i boost energetici della RRP. La RRP parametrizza i sottogruppi di boost tramite

$$\beta_E = \frac{E}{E_{\mathrm{p}}}, \quad |\beta_E| < 1, \qquad \phi_E = \operatorname{artanh}(\beta_E), \qquad \gamma_E = \cosh\phi_E,$$

senza alterare l'algebra di generatore: la *struttura di simmetria* resta $\mathfrak{so}(1,3)$. In particolare:

$$B_E(\hat{\boldsymbol{n}}, \phi_E) = \exp\big(\phi_E\, \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{K}\big), \quad R(\hat{\boldsymbol{n}}, \theta) = \exp\big(\theta\, \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{J}\big),$$

$$B_E(\hat{\boldsymbol{n}}_2, \phi_{E,2})\, B_E(\hat{\boldsymbol{n}}_1, \phi_{E,1}) = R_W\, B_E(\hat{\boldsymbol{n}}_{12}, \phi_{E,12}),$$

con R_W rotazione di Wigner determinata univocamente dai commutatori $[K_i, K_j] \propto J_k$. La *chiusura di gruppo*, l'*associatività* e la *stabilità del bound* $|\beta_E| < 1$ discendono dalla linearizzazione additiva in rapidità ϕ_E.

Riassunto operativo.

1. I generatori $M_{\mu\nu}$ definiti da $\eta G + G^\top \eta = 0$ realizzano $\mathfrak{so}(1,3)$.
2. La base fisica $\{\boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}\}$ soddisfa $[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k$, $[J_i, K_j] = \epsilon_{ijk} K_k$, $[K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk} J_k$.
3. I Casimir sono $C_1 = \boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{K}^2$ e $C_2 = \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{K}$.
4. La decomposizione complessa fornisce $su(2) \oplus su(2)$ con generatori $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$.
5. La copertura $SL(2,\mathbb{C})$ agisce per congruenza $X \mapsto S X S^\dagger$, preservando s_E^2.

6. La parametrizzazione planckiana entra *solo* nella scelta della rapidità $\phi_E = \operatorname{artanh}(E/E_\mathrm{p})$: la struttura di simmetria resta quella di Lorentz.

C Soluzioni esatte in cosmologia e astrofisica

C.1 Cosmologia FLRW con γ_E costante: soluzioni esatte a equazione di stato costante

Consideriamo uno spaziotempo omogeneo e isotropo con metrica FLRW (firma $+---$) e materia come fluido perfetto con equazione di stato $p = w\,\rho c^2$, con w costante. Nel quadro RRP con ripeso energetico costante $\gamma_E > 1$ si ha

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\,\frac{\rho}{\gamma_E^2} - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}, \qquad \dot\rho + 3H\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0.$$

La continuità implica $\rho(a) = \rho_0\,(a_0/a)^{3(1+w)}$. Per $k = 0$ e $\Lambda = 0$ otteniamo $H = \sqrt{\frac{8\pi G}{3\gamma_E^2}\,\rho_0\big(\frac{a_0}{a}\big)^{\frac{3(1+w)}{2}}}$, $\frac{\dot a}{a} = \frac{\alpha}{a^{\frac{3(1+w)}{2}}}$, $\alpha \equiv \sqrt{\frac{8\pi G}{3\gamma_E^2}\,\rho_0\,a_0^{\frac{3(1+w)}{2}}}$.

Separando le variabili,

$$a^{\frac{3(1+w)}{2}}\,da = \alpha\,dt \quad \Rightarrow \quad a(t) = a_\star\left(\frac{t}{t_\star}\right)^{\frac{2}{3(1+w)}},$$

con $a_\star, t_\star$ costanti d'integrazione. Dunque l'evoluzione di potenza è identica alla RG classica, ma i tempi caratteristici sono dilatati dal fattore γ_E attraverso $\alpha \propto 1/\gamma_E$. In particolare: polvere $(w = 0):\ a(t) \propto t^{2/3}$, radiazione $(w = \frac{1}{3}):\ a(t) \propto t^{1/2}$.

Con $\Lambda > 0$ e $k = 0$, a bassa densità domina la soluzione de Sitter

$$a(t) \propto \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}}\,t\right),$$

mentre con $k \neq 0$ si ottengono le usuali soluzioni trigonometriche/iperboliche sostituendo $\rho \to \rho/\gamma_E^2$ in tutte le costanti caratteristiche.

Osservazione. Per $\gamma_E =$ costante, l'intera dinamica FLRW è formalmente equivalente alla RG con densità efficace $\rho_\mathrm{eff} = \rho/\gamma_E^2$; gli esponenti di legge di potenza non cambiano, ma le scale temporali sono ricalibrate.

C.2 Modello di bounce esatto con legame $\epsilon^2(a) = \rho(a)/\rho_\mathrm{p}$

Introduciamo la realizzazione variazionale opzionale in cui il rapporto planckiano locale $\epsilon(x)$ soddisfa il vincolo algebrico

$$\epsilon^2 \equiv \left(\frac{E_\mathrm{state}}{E_\mathrm{p}}\right)^2 = \frac{\rho}{\rho_\mathrm{p}}, \qquad \gamma_E^2 = \frac{1}{1-\epsilon^2} = \frac{1}{1-\rho/\rho_\mathrm{p}},$$

con ρ_p una densità di scala planckiana. La prima di Friedmann modificata diventa

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\,\rho\left(1-\frac{\rho}{\rho_\mathrm{p}}\right) - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}.$$

Ponendo $k = \Lambda = 0$ e $p = w\rho c^2$ (con w costante), la continuità $\rho \propto a^{-3(1+w)}$ e l'equazione per H ammettono la soluzione esatta di bounce

$$\rho(t) = \frac{\rho_\mathrm{p}}{1+\left(\frac{t}{t_\mathrm{B}}\right)^2}, \qquad a(t) = a_\mathrm{B}\left[1+\left(\frac{t}{t_\mathrm{B}}\right)^2\right]^{\frac{1}{3(1+w)}},$$

con

$$t_\mathrm{B} = \frac{1}{\sqrt{6\pi G\,\rho_\mathrm{p}}}\,\frac{1}{1+w}, \qquad a_\mathrm{B} = \text{costante (minimo non nullo di } a).$$

Il punto di bounce ($H = 0$) avviene a $\rho = \rho_\mathrm{p}$ e l'evoluzione è regolare per ogni $t \in \mathbb{R}$. Per $w = 0$ e $w = \frac{1}{3}$ si ottengono esplicitamente

$$w = 0: \; a(t) = a_\mathrm{B}\left[1+\left(\tfrac{t}{t_\mathrm{B}}\right)^2\right]^{1/3}, \quad w = \tfrac{1}{3}: \; a(t) = a_\mathrm{B}\left[1+\left(\tfrac{t}{t_\mathrm{B}}\right)^2\right]^{1/4}.$$

Commento. Il bounce è qui una conseguenza dell'identificazione $\epsilon^2 = \rho/\rho_\mathrm{p}$, che rende γ_E divergente a densità planckiane e attenua la sorgente gravitazionale $\rho/\gamma_E^2 = \rho(1 - \rho/\rho_\mathrm{p})$.

C.3 Soluzioni statiche sferiche: esterno ed interni con densità costante

C.3.1 Esterno (vuoto) con massa efficace.

Nel vuoto $T^{(\mathrm{eff})}_{\mu\nu} = 0$; quindi le soluzioni di Einstein in vuoto coincidono con quelle standard, con i parametri di sorgente ripesati quando si raccordano a un interno materiale. Per una sorgente isolata di massa inerziale M la massa gravitante efficace all'esterno è

$$M_\mathrm{eff} = \frac{M}{\gamma_E^2},$$

e la metrica esterna è Schwarzschild–(A)dS:
$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM_\mathrm{eff}}{c^2 r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM_\mathrm{eff}}{c^2 r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

Il raggio gravitazionale efficace è $r_s^{(\mathrm{eff})} = 2GM_\mathrm{eff}/c^2 = r_s/\gamma_E^2$.

C.3.2 Interno di Schwarzschild (fluido incomprimibile).

Assumiamo un interno sferico di raggio R e densità $\rho =$ costante. Nel quadro RRP con $\gamma_E =$ costante nella regione sorgente, la densità e la pressione efficaci sono

$$\rho_\mathrm{eff} = \frac{\rho}{\gamma_E^2}, \qquad p_\mathrm{eff} = \frac{p}{\gamma_E^2}.$$

La soluzione interna a densità costante è allora identica alla soluzione classica con $\rho \to \rho_\mathrm{eff}$. Ponendo

$$m(r) = \frac{4\pi}{3}\,\rho_\mathrm{eff}\, r^3, \qquad e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} = 1 - \frac{8\pi G}{3c^2}\,\rho_\mathrm{eff}\, r^2,$$

il potenziale temporale $e^{\nu(r)}$ è

$$e^{\nu(r)} = \frac{1}{4}\left[3\sqrt{1-\frac{2GM_{\text{eff}}}{c^2R}} - \sqrt{1-\frac{2Gm(r)}{c^2r}}\right]^2,$$

e la pressione radiale (TOV) risulta

$$p_{\text{eff}}(r) = \rho_{\text{eff}}c^2\,\frac{\sqrt{1-\frac{2Gm(r)}{c^2r}} - \sqrt{1-\frac{2GM_{\text{eff}}}{c^2R}}}{3\sqrt{1-\frac{2GM_{\text{eff}}}{c^2R}} - \sqrt{1-\frac{2Gm(r)}{c^2r}}}.$$

Il raggio di Buchdahl si trasforma in

$$\frac{2GM_{\text{eff}}}{c^2R} < \frac{8}{9} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2GM}{c^2R} < \frac{8}{9}\,\gamma_E^2,$$

mostrando che, a parità di M e R, l'effetto planckiano tende ad allentare il vincolo di compattazione tramite $M_{\text{eff}} < M$.

C.3.3 Soluzione radiativa di Vaidya (massa variabile).

Per un flusso radiale nullo (accrezione/evaporazione) la metrica di Vaidya in coordinate avanzate v si scrive $ds^2 = \left(1-\frac{2GM_{\text{eff}}(v)}{c^2r}\right)c^2dv^2 + 2c\,dv\,dr - r^2d\Omega^2, \qquad M_{\text{eff}}(v) = \frac{M(v)}{\gamma_E^2}.$

La componente di stress–energia nulla che sostiene la soluzione scala come $T_{vv}^{(\text{eff})} = (1/4\pi r^2)\,\frac{dM_{\text{eff}}}{dv}$, coerentemente con il ripeso $1/\gamma_E^2$.

C.4 Onde gravitazionali in vuoto: soluzioni pp-wave

Poiché in vuoto le equazioni restano $R_{\mu\nu} = 0$, ogni soluzione esatta pp-wave della RG è soluzione anche in RRP. In coordinate di Brinkmann

$$ds^2 = 2\,du\,dv + H(u,x,y)\,du^2 + dx^2 + dy^2, \qquad \partial_x^2 H + \partial_y^2 H = 0,$$

fornisce un'onda piana esatta. La non-dispersione in vuoto ($v_{\text{ph}} = v_{\text{gr}} = c$) è garantita dall'assenza di termini di materia efficaci lungo la propagazione.

C.5 Geodetiche radiali e lensing per il campo esterno efficace

Nel campo esterno statico e sferico (Schwarzschild–(A)dS con M_{eff}) le equazioni geodetiche per particelle test sono identiche alle forme standard con sostituzione $M \mapsto M_{\text{eff}}$. In particolare, per fotoni ($ds^2 = 0$) l'angolo di deflessione a primo ordine è

$$\hat{\alpha} \simeq \frac{4GM_{\text{eff}}}{c^2 b} = \frac{4G}{c^2 b} \frac{M}{\gamma_E^2},$$

dove b è il parametro d'impatto. Per particelle massive (E_∞, L costanti del moto) il potenziale efficace

$$V_{\text{eff}}(r) = \left(1 - \frac{2GM_{\text{eff}}}{c^2 r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)\left(c^2 + \frac{L^2}{r^2}\right)$$

mostra lo spostamento dei raggi orbitali stabili/instabili in funzione di M_{eff}.

C.6 Riepilogo operativo

- *Cosmologia, γ_E = costante:* soluzioni FLRW identiche alla forma RG con $\rho \to \rho/\gamma_E^2$; esponenti invariati, tempi caratteristici ricalibrati.
- *Bounce esatto:* con $\epsilon^2 = \rho/\rho_{\text{p}}$ si ottiene $a(t) = a_{\text{B}}\,[1 + (t/t_{\text{B}})^2]^{1/3(1+w)}$ e $\rho(t) = \rho_{\text{p}}/[1 + (t/t_{\text{B}})^2]$.
- *Astrofisica statica:* esterni di Schwarzschild–(A)dS con $M_{\text{eff}} = M/\gamma_E^2$; interni incomprimibili e TOV si ottengono sostituendo $\rho \to \rho/\gamma_E^2$, $p \to p/\gamma_E^2$.
- *Onde in vuoto:* le pp-wave restano soluzioni esatte; nessuna dispersione di propagazione.
- *Osservabili:* deflessioni, raggi ISCO ed epoche caratteristiche dipendono da M_{eff}; la cinematica di luce e GW in vuoto resta indistinguibile da RG (leading order), mentre le differenze emergono alla sorgente o in regimi ad alta ϵ.

Bibliografia

Riferimenti bibliografici

- De Angelis, A. (2025). *TUC – Teoria Unificata della Coscienza. Volume I: Fondamenti formali e dinamiche emergenti*. Zenodo. `10.5281/zenodo.16792942`.

- Abbott, B. P. et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration). Gravitational Waves and Gamma-rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A. *Physical Review Letters*, 119, 161101 (2017). doi:10.1103/PhysRevLett.119.161101. arXiv:1710.05834.

- Abbott, R. et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration). GWTC-3: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the Second Part of the Third Observing Run. arXiv:2111.03606 (2021).

- Aldrovandi, R.; Beltrán Almeida, J. P.; Pereira, J. G. de Sitter special relativity. *Classical and Quantum Gravity*, 24(6), 1385–1404 (2007). doi:10.1088/0264-9381/24/6/004. arXiv:gr-qc/0606122.

- Amelino-Camelia, G. Doubly Special Relativity. *Nature*, 418, 34–35 (2002). doi:10.1038/418034a. arXiv:gr-qc/0207049.

- Amelino-Camelia, G. Relativity in space-times with short-distance structure governed by an observer-independent (Planckian) length scale. *International Journal of Modern Physics D*, 11(1), 35–59 (2002). doi:10.1142/S0218271802001330. arXiv:gr-qc/0012051.

- Amelino-Camelia, G. Testable scenario for Relativity with minimum-length. *Physics Letters B*, 510(1–4), 255–263 (2001). doi:10.1016/S0370-2693(01)00506-8. arXiv:hep-th/0012238.

- Curtis-Lake, E. et al. Spectroscopic confirmation of galaxies at redshifts greater than 10. *Nature Astronomy*, 7, 622–632 (2023). doi:10.1038/s41550-023-01921-1.

- Fermi LAT Collaboration (2009). A limit on the variation of the speed of light arising from quantum gravity effects. *Nature*, 462(7271), 331–334.

- Hossenfelder, S. (2015, 25 marzo). No, the LHC will not make contact with parallel universes. *Backreaction*. Recuperato il 17 ottobre 2015.

- Magueijo, J.; Smolin, L. Generalized Lorentz invariance with an invariant energy scale. *Physical Review D*, 67(4), 044017 (2003). doi:10.1103/PhysRevD.67.044017. arXiv:gr-qc/0207085.

- Magueijo, J.; Smolin, L. Gravity's Rainbow. *Classical and Quantum Gravity*, 21(7), 1725–1736 (2004). doi:10.1088/0264-9381/21/7/001. arXiv:gr-qc/0305055.

- Magueijo, J.; Smolin, L. Lorentz invariance with an invariant energy scale. *Physical Review Letters*, 88(19), 190403 (2002). doi:10.1103/PhysRevLett.88.190403. arXiv:hep-th/0112090.

- Vasileiou, V. et al. (Fermi LAT Collaboration). Constraints on Lorentz Invariance Violation from Fermi-Large Area Telescope Observations of Gamma-Ray Bursts. *Physical Review D*, 87, 122001 (2013). doi:10.1103/PhysRevD.87.122001. arXiv:1305.3463.